

Kontrola $V^T P V$

$$\begin{aligned}\hat{V}^T P \hat{V} &= (A\hat{X} + L)^T P (A\hat{X} + L) = \\ &= (\hat{X}^T A^T + L^T) P (A\hat{X} + L) = \\ &= X^T A^T P A \hat{X} + \hat{X}^T A^T P L + L^T P A \hat{X} + L^T P L = \\ &= \hat{X}^T A^T P A (- (A^T P A)^{-1} (A^T P L)) + \hat{X}^T A^T P L + L^T P A \hat{X} + L^T P L = \\ &= -\hat{X}^T A^T P L + \hat{X}^T A^T P L + L^T P A \hat{X} + L^T P L = \\ & \qquad \qquad \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\hat{V}^T P \hat{V} = L^T P A \hat{X} + L^T P L \qquad (2)$$

Ocena dokładności wyrównania

Błąd średni typowego spostrzeżenia

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{(n - r)} \quad (3)$$

Ocena dokładności wyrównania

Błąd średni typowego spostrzeżenia

$$\hat{\sigma}_0^2 = m_0^2 = \frac{V^T P V}{(n - r)} \quad (3)$$

Ocena dokładności wyrównania

Błąd średni typowego spostrzeżenia

$$\hat{\sigma}_0^2 = m_0^2 = \frac{V^T P V}{(n - r)} \quad (3)$$

wielkość niemianowana, wartość większa od 1 oznacza, że błędy średnie *a priori* były niedoszacowane (zbyt optymistyczne), a wartość mniejsza od 1 oznacza, że przyjęte wstępnie błędy średnie były większe niż rzeczywiste.

$C_{\hat{X}}$

Macierz kowariancyjna (wariancyjno-kowariancyjna) wektora niewiadomych,

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \quad (4)$$

$C_{\hat{X}}$

Macierz kowariancyjna (wariancyjno-kowariancyjna) wektora niewiadomych,

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \quad (4)$$

$$C_{\hat{X}} = D \cdot C_L \cdot D^T \quad (5)$$

$C_{\hat{X}}$

Macierz kowariancyjna (wariancyjno-kowariancyjna) wektora niewiadomych,

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \quad (4)$$

$$C_{\hat{X}} = D \cdot C_L \cdot D^T \quad (5)$$

$$D = -(A^T P A)^{-1} A^T P \quad (6)$$

Macierz kowariancyjna (wariancyjno-kowariancyjna) wektora niewiadomych,

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \quad (4)$$

$$C_{\hat{X}} = D \cdot C_L \cdot D^T \quad (5)$$

$$D = -(A^T P A)^{-1} A^T P \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C_{\hat{X}} &= -(A^T P A)^{-1} A^T P \cdot \sigma_0^2 P^{-1} \cdot (-P A (A^T P A^{-1})) = \\ &= \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P P^{-1} P A (A^T P A)^{-1} = \\ &= \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

$C_{\hat{X}}$

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} m_{\hat{X}_1}^2 & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_r) \\ \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_1) & m_{\hat{X}_2}^2 & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_1) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_r) & \dots & m_{\hat{X}_r}^2 \end{bmatrix}$$

$C_{\hat{X}}$

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} m_{\hat{X}_1}^2 & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_r) \\ \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_1) & m_{\hat{X}_2}^2 & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_1) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_r) & \dots & m_{\hat{X}_r}^2 \end{bmatrix}$$

Macierz symetryczna ($\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i)$), na przekątnej wariancje (błędy średnie elementów wektora niewiadomych), a poza przekątnymi kowariancje.

$C_{\hat{X}}$

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} m_{\hat{X}_1}^2 & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_r) \\ \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_1) & m_{\hat{X}_2}^2 & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_1) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_r) & \dots & m_{\hat{X}_r}^2 \end{bmatrix}$$

Macierz symetryczna ($\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i)$), na przekątnej wariancje (błędy średnie elementów wektora niewiadomych), a poza przekątnymi kowariancje.

Błędy średnie poszczególnych estymatorów wektora niewiadomych po wyrównaniu można obliczyć jako $m_{\hat{X}_i} = \sqrt{C_{\hat{X}_{ii}}}$.

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} m_{\hat{X}_1}^2 & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_r) \\ \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_1) & m_{\hat{X}_2}^2 & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_1) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_r) & \dots & m_{\hat{X}_r}^2 \end{bmatrix}$$

Macierz symetryczna ($\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i)$), na przekątnej wariancje (błędy średnie elementów wektora niewiadomych), a poza przekątnymi kowariancje.

Błędy średnie poszczególnych estymatorów wektora niewiadomych po wyrównaniu można obliczyć jako $m_{\hat{X}_i} = \sqrt{C_{\hat{X}_{ii}}}$.

Policzenie $A^T P A$ nie wymaga znajomości obserwacji (wektora L) – względne ocena dokładności – wstępna analiza dokładności.

$C_{\hat{V}}$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L$$

$C_{\hat{V}}$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot L \quad (8)$$

$C_{\hat{V}}$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot L \quad (8)$$

$$C_{\hat{V}} = D \cdot C_L \cdot D^T \quad (9)$$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot L \quad (8)$$

$$C_{\hat{V}} = D \cdot C_L \cdot D^T \quad (9)$$

$$D = (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \quad (10)$$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot L \quad (8)$$

$$C_{\hat{V}} = D \cdot C_L \cdot D^T \quad (9)$$

$$D = (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \quad (10)$$

$$C_{\hat{V}} = \sigma_0^2 (P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T) \quad (11)$$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot L \quad (8)$$

$$C_{\hat{V}} = D \cdot C_L \cdot D^T \quad (9)$$

$$D = (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \quad (10)$$

$$C_{\hat{V}} = \sigma_0^2 (P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T) \quad (11)$$

Błędy średnie poszczególnych estymatorów wektora poprawek można obliczyć jako $m_{\hat{V}_i} = \sqrt{C_{\hat{V}_{ii}}}$.

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V}$$

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot (-h^{ob} + h^0) \quad (12)$$

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot (-h^{ob} + h^0) \quad (12)$$

$$C_{\hat{h}} = D \cdot C_{h^{ob}} \cdot D^T \quad (13)$$

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot (-h^{ob} + h^0) \quad (12)$$

$$C_{\hat{h}} = D \cdot C_{h^{ob}} \cdot D^T \quad (13)$$

$$D = A(A^T P A)^{-1} A^T P \quad (14)$$

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot (-h^{ob} + h^0) \quad (12)$$

$$C_{\hat{h}} = D \cdot C_{h^{ob}} \cdot D^T \quad (13)$$

$$D = A(A^T P A)^{-1} A^T P \quad (14)$$

$$C_{\hat{h}} = \sigma_0^2 (A(A^T P A)^{-1} A^T)^T \quad (15)$$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) \cdot (-h^{ob} + h^0) \quad (12)$$

$$C_{\hat{h}} = D \cdot C_{h^{ob}} \cdot D^T \quad (13)$$

$$D = A(A^T P A)^{-1} A^T P \quad (14)$$

$$C_{\hat{h}} = \sigma_0^2 (A(A^T P A)^{-1} A^T)^T \quad (15)$$

Błędy średnie poszczególnych estymatorów wektora poprawek można obliczyć jako $m_{\hat{h}_i} = \sqrt{C_{\hat{h}_{ii}}}$.

Macierz kowariancyjna funkcji

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ \dots \\ f_n(\vec{X}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Macierz kowariancyjna funkcji

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ \dots \\ f_n(\vec{X}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$C_{\vec{u}} = D \cdot C_{\vec{X}} \cdot D^T \quad (17)$$

Macierz kowariancyjna funkcji

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ \dots \\ f_n(\vec{X}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$C_{\vec{u}} = D \cdot C_{\vec{X}} \cdot D^T \quad (17)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_r} \\ \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_r} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Macierz kowariancyjna funkcji

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ \dots \\ f_n(\vec{X}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$C_{\vec{u}} = D \cdot C_{\vec{X}} \cdot D^T \quad (17)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_r} \\ \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_r} \end{bmatrix} \quad (18)$$

D – macierz Jacobiego, $|D|$ – jacobian

Ocena dokładności wyrównania – podsumowanie

$$\hat{C}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \quad (19)$$

Ocena dokładności wyrównania – podsumowanie

$$\hat{C}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \quad (19)$$

$$\hat{C}_{\hat{V}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(P^{-1} - A \cdot (A^T P A)^{-1} A^T \right) \quad (20)$$

Ocena dokładności wyrównania – podsumowanie

$$\hat{C}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \quad (19)$$

$$\hat{C}_{\hat{V}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(P^{-1} - A \cdot (A^T P A)^{-1} A^T \right) \quad (20)$$

$$\hat{C}_{\hat{h}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(A \cdot (A^T P A)^{-1} A^T \right) \quad (21)$$

Ocena dokładności wyrównania – podsumowanie

$$\hat{C}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1} \quad (19)$$

$$\hat{C}_{\hat{V}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(P^{-1} - A \cdot (A^T P A)^{-1} A^T \right) \quad (20)$$

$$\hat{C}_{\hat{h}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(A \cdot (A^T P A)^{-1} A^T \right) \quad (21)$$

Prawo propagacji kowariancji

$$C_u = D \cdot \hat{C}_{\hat{x}} \cdot D^T \quad (22)$$