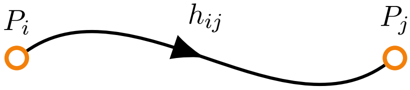
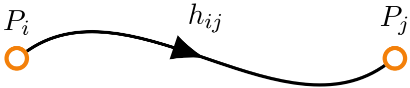
Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych

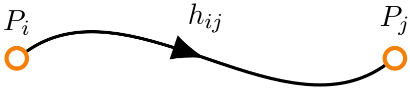


Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



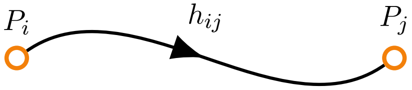
$$h_{ij} = H_j - H_i \tag{1}$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \tag{1}$$

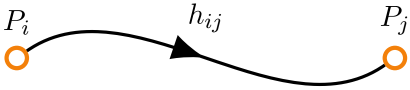
Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \tag{1}$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \tag{2}$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych

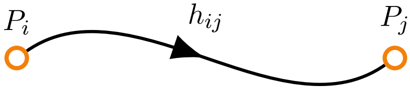


$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \tag{1}$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \tag{2}$$

Metoda pośrednicząca — rzędne reperów w wektorze niewiadomych to niewiadome pośredniczące

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych

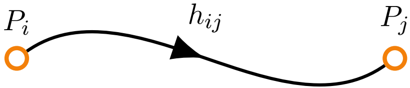


$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \tag{1}$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \tag{2}$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmuję się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):
$H_i = H_i^0 + \mathsf{d}H_i$
$H_j = H_j^0 + \mathsf{d}H_j$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



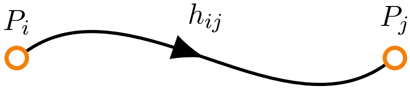
$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \tag{1}$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \tag{2}$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmuję się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):
$H_i = H_i^0 + \mathsf{d}H_i$
$H_j = H_j^0 + \mathsf{d}H_j$
Wtedy równanie poprawek przyjmuje postać

$$v_{ij} = \mathsf{d}H_j - \mathsf{d}H_i + H_j^0 - H_i^0 - h_{ij}$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



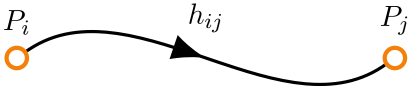
$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \tag{1}$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \tag{2}$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmuję się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):
$H_i = H_i^0 + \mathsf{d}H_i$
$H_j = H_j^0 + \mathsf{d}H_j$
Wtedy równanie poprawek przyjmuje postać

$$v_{ij} = \mathsf{d}H_j - \mathsf{d}H_i + \underbrace{H_j^0 - H_i^0 - h_{ij}}_{l_{ij}} \tag{3}$$

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \tag{1}$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \tag{2}$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmuję się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):

$H_i = H_i^0 + \mathsf{d}H_i$

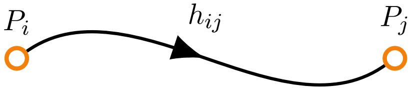
$H_j = H_j^0 + \mathsf{d}H_j$

Wtedy równanie poprawek przyjmuje postać

$$v_{ij} = \mathsf{d}H_j - \mathsf{d}H_i + H_j^0 - H_i^0 - h_{ij} \tag{3}$$

niewiadomymi nie są rzedne reperów, tylko przyrosty do przybliżonych wartości wysokości reperów

Równania obserwacyjne w sieciach wysokościowych



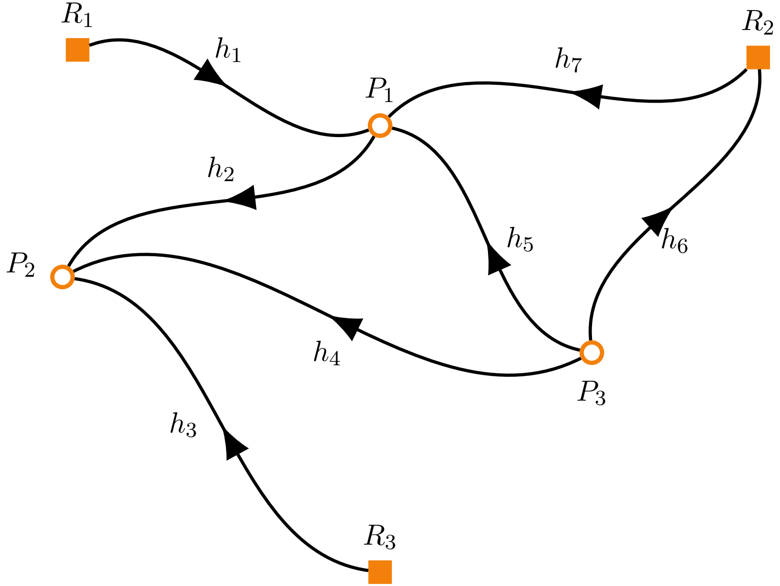
$$h_{ij}^{ob} + v_{ij} = H_j - H_i \tag{1}$$

$$v_{ij} = H_j - H_i - h_{ij} \tag{2}$$

Czasem w sieciach niwelacyjnych przyjmuję się przybliżone wartości rzędnych reperów (H^0):
$H_i = H_i^0 + \mathsf{d}H_i$
$H_j = H_j^0 + \mathsf{d}H_j$
Wtedy równanie poprawek przyjmuje postać

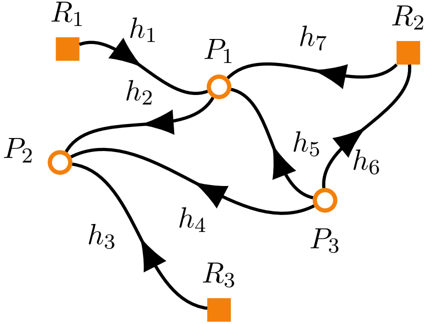
Wprowadzenie współrzędnych przybliżonych w sieciach niwelacyjnych wynika bardziej z tradycji geodezyjnej, czy analogii do innych zadań wyrównawczych, niż z rzeczywistej matematycznej potrzeby

Przykład ułożenia równań poprawek



Przykład ułożenia równań poprawek

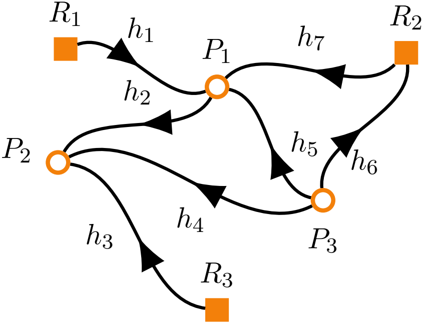
$$h_1^{ob} + v_1 \;=\; H_1 - H_{R_1}$$



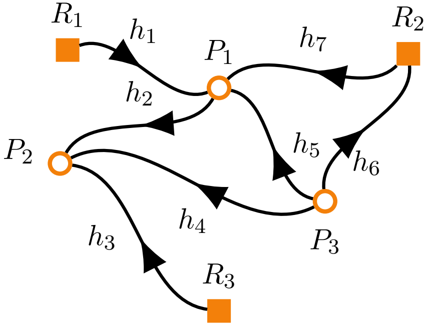
Przykład ułożenia równań poprawek

$$h_1^{ob} + v_1 = H_1 - H_{R_1}$$

$$h_2^{ob} + v_2 = H_2 - H_1$$

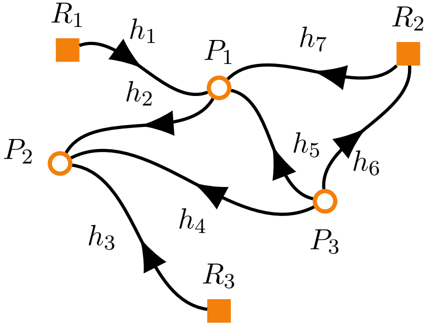


Przykład ułożenia równań poprawek



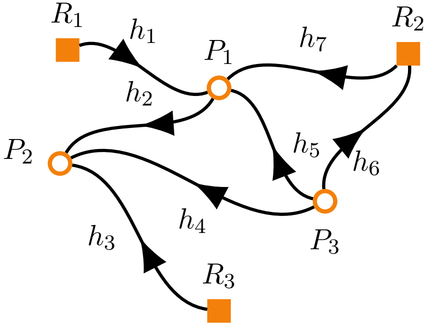
$$
\begin{aligned}
h_1^{ob} + v_1 &= H_1 - H_{R_1} \\
h_2^{ob} + v_2 &= H_2 - H_1 \\
h_3^{ob} + v_3 &= H_2 - H_{R_3}
\end{aligned}
$$

Przykład ułożenia równań poprawek



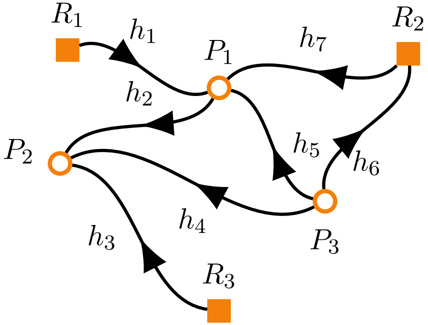
$$h_1^{ob} + v_1 = H_1 - H_{R_1}$$
$$h_2^{ob} + v_2 = H_2 - H_1$$
$$h_3^{ob} + v_3 = H_2 - H_{R_3}$$
$$h_4^{ob} + v_4 = H_2 - H_3$$

Przykład ułożenia równań poprawek



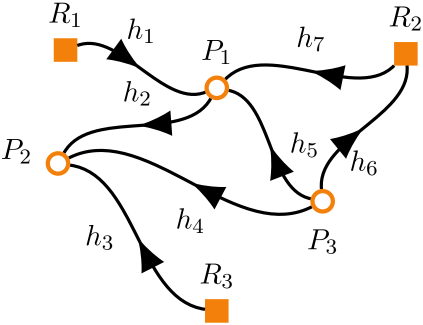
$$
\begin{aligned}
h_1^{ob} + v_1 &= H_1 - H_{R_1} \\
h_2^{ob} + v_2 &= H_2 - H_1 \\
h_3^{ob} + v_3 &= H_2 - H_{R_3} \\
h_4^{ob} + v_4 &= H_2 - H_3 \\
h_5^{ob} + v_5 &= H_1 - H_3
\end{aligned}
$$

Przykład ułożenia równań poprawek



$$
\begin{aligned}
h_1^{ob} + v_1 &= H_1 - H_{R_1} \\
h_2^{ob} + v_2 &= H_2 - H_1 \\
h_3^{ob} + v_3 &= H_2 - H_{R_3} \\
h_4^{ob} + v_4 &= H_2 - H_3 \\
h_5^{ob} + v_5 &= H_1 - H_3 \\
h_6^{ob} + v_6 &= H_{R_2} - H_3
\end{aligned}
$$

Przykład ułożenia równań poprawek



$$
\begin{aligned}
h_1^{ob} + v_1 &= H_1 - H_{R_1} \\
h_2^{ob} + v_2 &= H_2 - H_1 \\
h_3^{ob} + v_3 &= H_2 - H_{R_3} \\
h_4^{ob} + v_4 &= H_2 - H_3 \\
h_5^{ob} + v_5 &= H_1 - H_3 \\
h_6^{ob} + v_6 &= H_{R_2} - H_3 \\
h_7^{ob} + v_7 &= H_1 - H_{R_2}
\end{aligned}
$$

Przykład ułożenia równań poprawek

$$
\begin{array}{llllllll}
v_1 & = & H_1 & & & -H_{R_1} & -h_1^{ob} \\
v_2 & = & -H_1 & +H_2 & & & -h_2^{ob} \\
v_3 & = & & H_2 & & -H_{R_3} & -h_3^{ob} \\
v_4 & = & & H_2 & -H_3 & & -h_4^{ob} \\
v_5 & = & H_1 & & -H_3 & & -h_5^{ob} \\
v_6 & = & & & -H_3 & +H_{R_2} & -h_6^{ob} \\
v_7 & = & H_1 & & & -H_{R_1} & -h_7^{ob}
\end{array}
$$

Przykład ułożenia równań poprawek

$$
\begin{array}{c}
V \\
\boxed{\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\
\begin{array}{c} = \\ = \\ = \\ = \\ = \\ = \\ = \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
A \cdot X \\
\boxed{\begin{array}{rrr}
H_1 & & \\
-H_1 & +H_2 & \\
 & H_2 & \\
 & H_2 & -H_3 \\
H_1 & & -H_3 \\
 & & -H_3 \\
H_1 & &
\end{array}}
\end{array}
\begin{array}{c}
L \\
\boxed{\begin{array}{ll}
-H_{R_1} & -h_1^{ob} \\
 & -h_2^{ob} \\
-H_{R_3} & -h_3^{ob} \\
 & -h_4^{ob} \\
 & -h_5^{ob} \\
+H_{R_2} & -h_6^{ob} \\
-H_{R_1} & -h_7^{ob}
\end{array}}
\end{array}
$$

Przykład ułożenia równań poprawek

$$
\begin{array}{ccllllll}
V & & & \mathbf{A}\cdot X & & & L & \\
v_1 & = & +\mathbf{1}\cdot H_1 & & & & -H_{R_1} & -h_1^{ob} \\
v_2 & = & -\mathbf{1}\cdot H_1 & +\mathbf{1}\cdot H_2 & & & & -h_2^{ob} \\
v_3 & = & & +\mathbf{1}\cdot H_2 & & & -H_{R_3} & -h_3^{ob} \\
v_4 & = & & +\mathbf{1}\cdot H_2 & -\mathbf{1}\cdot H_3 & & & -h_4^{ob} \\
v_5 & = & +\mathbf{1}\cdot H_1 & & -\mathbf{1}\cdot H_3 & & & -h_5^{ob} \\
v_6 & = & & & -\mathbf{1}\cdot H_3 & & +H_{R_2} & -h_6^{ob} \\
v_7 & = & +\mathbf{1}\cdot H_1 & & & & -H_{R_1} & -h_7^{ob}
\end{array}
$$

Przykład ułożenia równań poprawek

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -H_{R_1} - h_1^{ob} \\ - h_2^{ob} \\ -H_{R_3} - h_3^{ob} \\ - h_4^{ob} \\ - h_5^{ob} \\ H_{R_2} - h_6^{ob} \\ -H_{R_1} - h_7^{ob} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

Wyrównane wysokości

$$\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{4}$$

Rozwiązanie

Wyrównane wysokości

$$\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{4}$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A\hat{X} + L \tag{5}$$

Rozwiązanie

Wyrównane wysokości

$$\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{4}$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A\hat{X} + L \tag{5}$$

Kontrole

$$A^{\mathrm{T}}PV = \vec{0} \tag{6}$$

$$V^{\mathrm{T}}PV = L^{\mathrm{T}}PV = L^{\mathrm{T}}PA\hat{X} + L^{\mathrm{T}}PL \tag{7}$$

Rozwiązanie

Wyrównane wysokości

$$\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{4}$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A\hat{X} + L \tag{5}$$

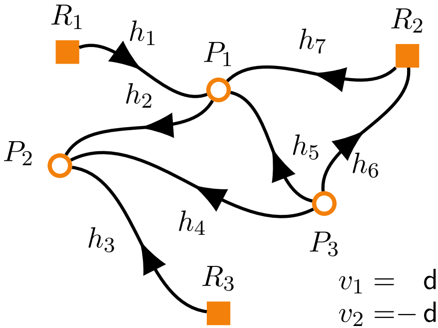
Kontrole

$$A^{\mathrm{T}}PV = \vec{0} \tag{6}$$

$$V^{\mathrm{T}}PV = L^{\mathrm{T}}PV = L^{\mathrm{T}}PA\hat{X} + L^{\mathrm{T}}PL \tag{7}$$

Wyrównane obserwacje

$$h^{w} = h^{ob} + V \tag{8}$$



Współrzędne przybliżone

$$H_1^0 = H_{R_1} + h_1^{ob}$$
$$H_2^0 = H_{R_3} + h_3^{ob}$$
$$H_3^0 = H_{R_2} - h_6^{ob}$$

Przyrosty do współrzędnych

$$H_1 = H_1^0 + \mathsf{d}H_1$$
$$H_2 = H_2^0 + \mathsf{d}H_2$$
$$H_3 = H_3^0 + \mathsf{d}H_3$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= \mathsf{d}H_1 + H_1^0 - H_{R_1} - h_1^{ob}\\
v_2 &= -\mathsf{d}H_1 + \mathsf{d}H_2 - H_1^0 + H_2^0 - h_2^{ob}\\
v_3 &= \mathsf{d}H_2 + H_2^0 - H_{R_3} - h_3^{ob}\\
v_4 &= \mathsf{d}H_2 - \mathsf{d}H_3 + H_2^0 - H_3^0 - h_4^{ob}\\
v_5 &= \mathsf{d}H_1 - \mathsf{d}H_3 + H_1^0 - H_3^0 - h_5^{ob}\\
v_6 &= -\mathsf{d}H_3 - H_3^0 + H_{R_2} - h_6^{ob}\\
v_7 &= \mathsf{d}H_1 + H_1^0 - H_{R_2} - h_7^{ob}
\end{aligned}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathsf{d}X = \begin{bmatrix} \mathsf{d}H_1 \\ \mathsf{d}H_2 \\ \mathsf{d}H_3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} H_1^0 - H_{R_1} - h_1^{ob} \\ -H_1^0 + H_2^0 - h_2^{ob} \\ H_2^0 - H_{R_3} - h_3^{ob} \\ H_2^0 - H_3^0 - h_4^{ob} \\ H_1^0 - H_3^0 - h_5^{ob} \\ -H_3^0 + H_{R_2} - h_6^{ob} \\ H_1^0 - H_{R_1} - h_7^{ob} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$\mathrm{d}\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{9}$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$\mathsf{d}\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{9}$$

Wyrównane wysokości

$$H^w = H^0 + \mathsf{d}\hat{X} \tag{10}$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$\mathsf{d}\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{9}$$

Wyrównane wysokości

$$H^{w} = H^{0} + \mathsf{d}\hat{X} \tag{10}$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A\mathsf{d}\hat{X} + L \tag{11}$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$\mathrm{d}\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{9}$$

Wyrównane wysokości

$$H^w = H^0 + \mathrm{d}\hat{X} \tag{10}$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A\mathrm{d}\hat{X} + L \tag{11}$$

Kontrole

$$A^{\mathrm{T}}PV = \vec{0} \tag{12}$$

$$V^{\mathrm{T}}PV = L^{\mathrm{T}}PV = L^{\mathrm{T}}PA\mathrm{d}\hat{X} + L^{\mathrm{T}}PL \tag{13}$$

Rozwiązanie

Wyrównane przyrosty wysokości

$$\mathsf{d}\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{9}$$

Wyrównane wysokości

$$H^w = H^0 + \mathsf{d}\hat{X} \tag{10}$$

Poprawki do obserwacji

$$\hat{V} = A\mathsf{d}\hat{X} + L \tag{11}$$

Kontrole

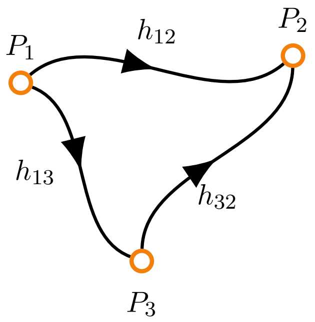
$$A^{\mathrm{T}}PV = \vec{0} \tag{12}$$

$$V^{\mathrm{T}}PV = L^{\mathrm{T}}PV = L^{\mathrm{T}}PA\mathsf{d}\hat{X} + L^{\mathrm{T}}PL \tag{13}$$

Wyrównane obserwacje

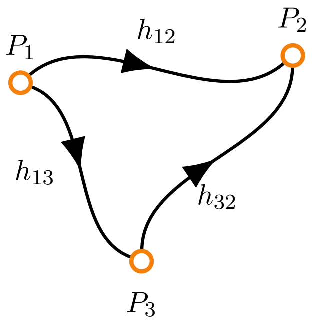
$$h^w = h^{ob} + V \tag{14}$$

Problem z odwrotnością macierzy $A^{\mathrm{T}}PA$



Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?

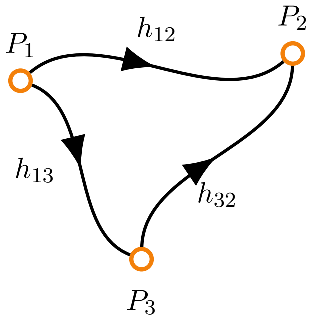
Problem z odwrotnością macierzy $A^{\mathrm{T}}PA$



Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{32} \end{bmatrix}$$

Problem z odwrotnością macierzy $A^{\mathrm{T}}PA$

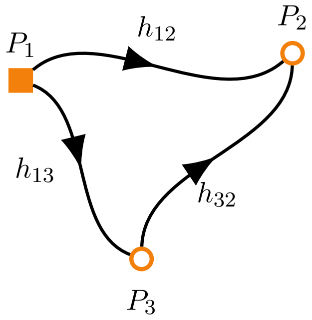


Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{32} \end{bmatrix}$$

Problemem jest osobliwość macierzy A:
$\det A = 0 = \det A^{\mathrm{T}}A$

Problem z odwrotnością macierzy $A^{\mathrm{T}}PA$

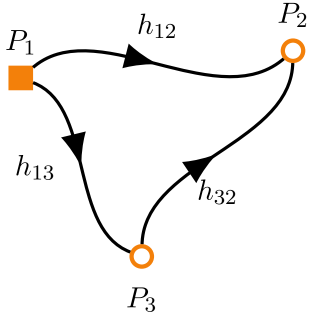


Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{32} \end{bmatrix}$$

Problemem jest osobliwość macierzy A:
$\det A = 0 = \det A^{\mathrm{T}}A$
Nieznane wysokości można przesuwać o znaną wartość nie zniekształacając obserwacji.

Problem z odwrotnością macierzy $A^{\mathrm{T}}PA$



Czy tę sieć niwelacyjną można wyrównać?

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{32} \end{bmatrix}$$

Problemem jest osobliwość macierzy A:
$\det A = 0 = \det A^{\mathrm{T}}A$
Nieznane wysokości można przesuwać o znaną wartość nie zniekształacając obserwacji.

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{12} - H_1 \\ h_{13} - H_1 \\ h_{32} \end{bmatrix}$$