

## Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \tag{1}$$

## Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \quad (1)$$

Funkcja celu

$$V^T V$$

## Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \quad (1)$$

Funkcja celu

$$V^T V = (Ax + L)^T (Ax + L) \quad (2)$$

## Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \quad (1)$$

Funkcja celu

$$V^T V = (Ax + L)^T (Ax + L) \quad (2)$$

$$V^T V = x^T A^T Ax + x^T A^T L + L^T Ax + L^T L \quad (3)$$

## Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \quad (1)$$

Funkcja celu

$$V^T V = (Ax + L)^T (Ax + L) \quad (2)$$

$$V^T V = x^T A^T Ax + x^T A^T L + L^T Ax + L^T L \quad (3)$$

$$V^T V = x^T A^T Ax + 2x^T A^T L + L^T L \quad (4)$$

## Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \quad (1)$$

Funkcja celu

$$V^T V = (Ax + L)^T (Ax + L) \quad (2)$$

$$V^T V = x^T A^T Ax + x^T A^T L + L^T Ax + L^T L \quad (3)$$

$$V^T V = x^T A^T Ax + 2x^T A^T L + L^T L \quad (4)$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^T V}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V^T}{\partial x} V + V^T \frac{\partial V}{\partial x} \right) = A^T V = A^T Ax + A^T L = 0 \quad (5)$$

## Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \quad (1)$$

Funkcja celu

$$V^T V = (Ax + L)^T (Ax + L) \quad (2)$$

$$V^T V = x^T A^T Ax + x^T A^T L + L^T Ax + L^T L \quad (3)$$

$$V^T V = x^T A^T Ax + 2x^T A^T L + L^T L \quad (4)$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^T V}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V^T}{\partial x} V + V^T \frac{\partial V}{\partial x} \right) = A^T V = A^T Ax + A^T L = 0 \quad (5)$$

Rozwiązanie równań normalnych

$$\hat{x} = -(A^T A)^{-1} \cdot (A^T L) \quad (6)$$

## Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \quad (1)$$

Funkcja celu

$$V^T V = (Ax + L)^T (Ax + L) \quad (2)$$

$$V^T V = x^T A^T Ax + x^T A^T L + L^T Ax + L^T L \quad (3)$$

$$V^T V = x^T A^T Ax + 2x^T A^T L + L^T L \quad (4)$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^T V}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V^T}{\partial x} V + V^T \frac{\partial V}{\partial x} \right) = A^T V = A^T Ax + A^T L = 0 \quad (5)$$

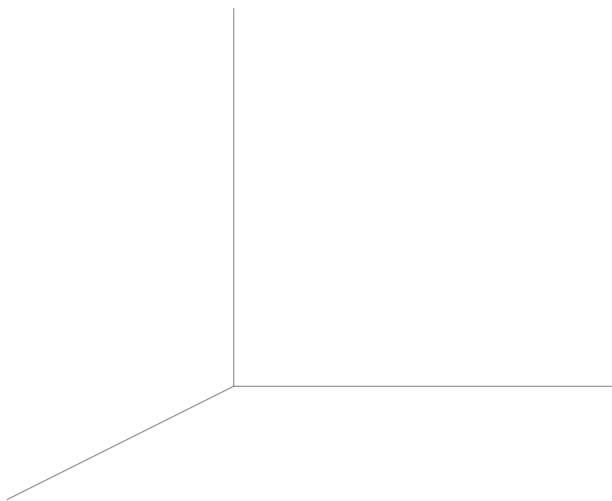
Rozwiązanie równań normalnych

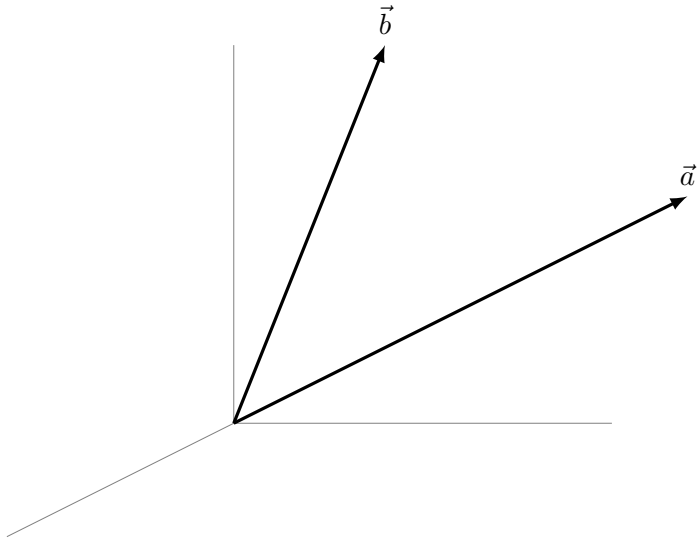
$$\hat{x} = -(A^T A)^{-1} \cdot (A^T L) \quad (6)$$

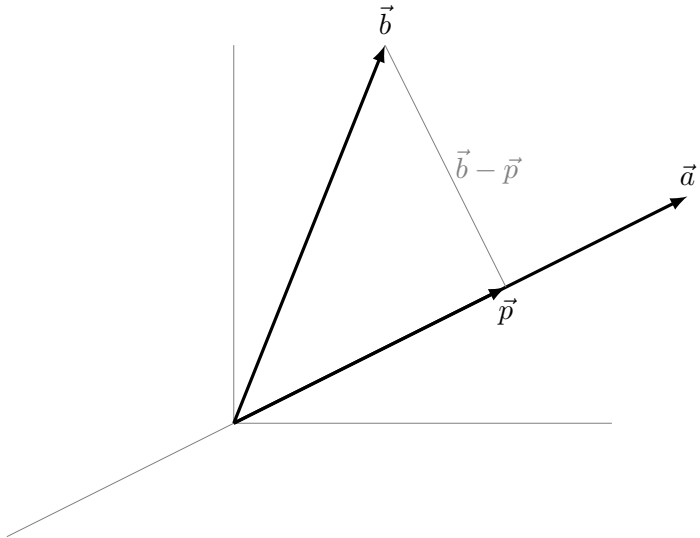
Wyznaczone poprawki

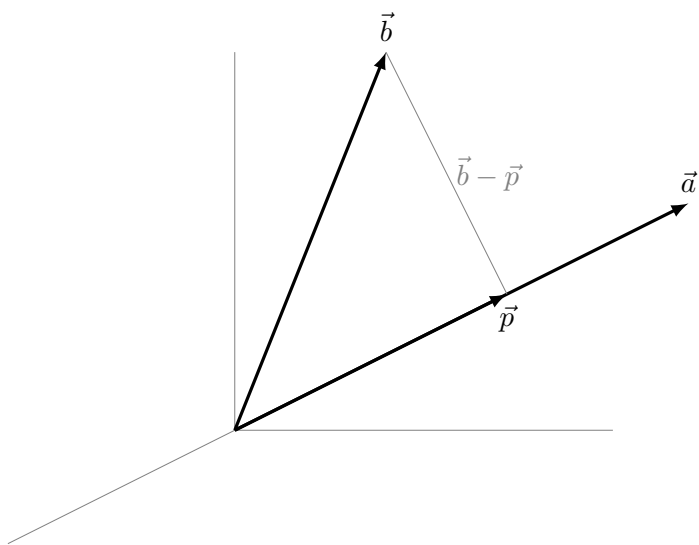
$$\hat{V} = A\hat{x} + L \quad (7)$$





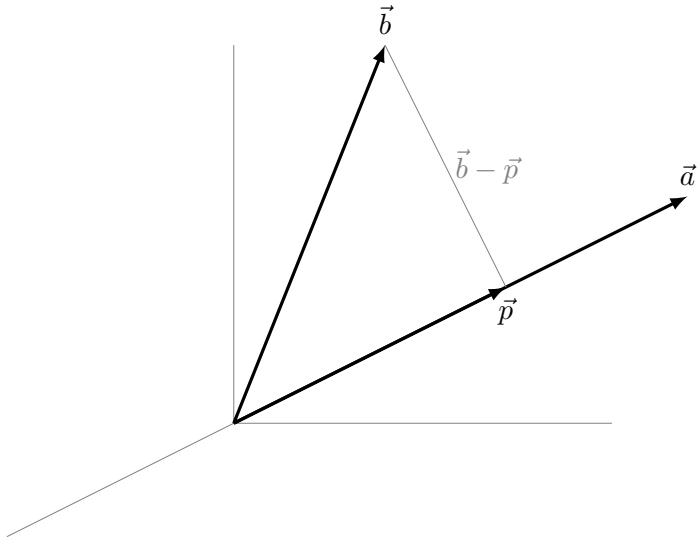






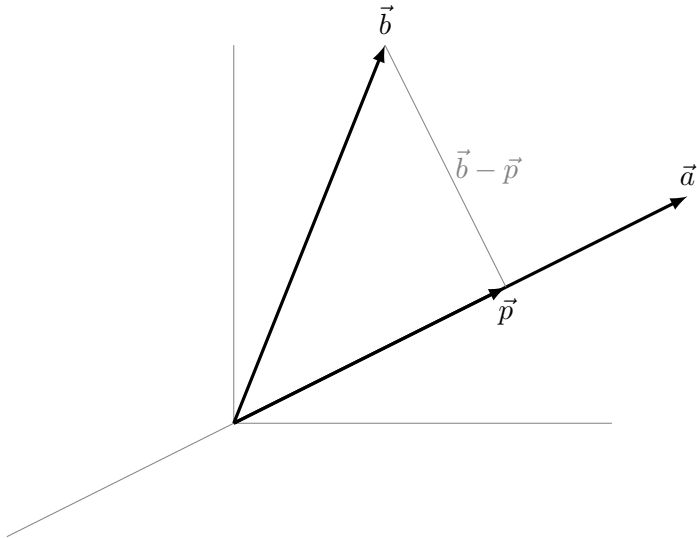
$$\vec{p} = \hat{x}\vec{a}$$

(8)



$$\vec{p} = \hat{x}\vec{a} \tag{8}$$

$$\vec{a}(\vec{b} - \vec{p})$$



$$\vec{p} = \hat{x}\vec{a} \tag{8}$$

$$\vec{a}(\vec{b} - \vec{p}) = 0 = \vec{a}(\vec{b} - \hat{x}\vec{a}) \tag{9}$$

$$\hat{x} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}} = \frac{a^T b}{a^T a} \quad (10)$$

$$\hat{x} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}} = \frac{a^T b}{a^T a} \quad (10)$$

Macierz rzutowania ( $P$ )

$$p = Pb \quad (11)$$



$$\hat{x} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}} = \frac{a^T b}{a^T a} \quad (10)$$

Macierz rzutowania ( $P$ )

$$p = Pb \quad (11)$$

$$p = \frac{a^T b}{a^T a} a \quad (12)$$

$$p = Pb = a \cdot \frac{a^T b}{a^T a} \quad (13)$$

$$P = \frac{aa^T}{a^T a} \quad (14)$$

Teraz mamy  $n$  wektorów (liniowo niezależnych) rozpinających  $n$  wymiarową podprzestrzeń, a szukamy kombinacji liniowej

$$\hat{x}_1 a_1 + \dots + \hat{x}_n a_n.$$

Teraz mamy  $n$  wektorów (liniowo niezależnych) rozpinających  $n$  wymiarową podprzestrzeń, a szukamy kombinacji liniowej

$$\hat{x}_1 a_1 + \dots + \hat{x}_n a_n.$$

Musimy znaleźć taką kombinację  $p = A\hat{x}$ , która będzie najbliższa  $b$ .

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0 \tag{15}$$

Teraz mamy  $n$  wektorów (liniowo niezależnych) rozpinających  $n$  wymiarową podprzestrzeń, a szukamy kombinacji liniowej

$$\hat{x}_1 a_1 + \dots + \hat{x}_n a_n.$$

Musimy znaleźć taką kombinację  $p = A\hat{x}$ , która będzie najbliższa  $b$ .

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0 \quad (15)$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b \quad (16)$$

$$p = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1}(A^T b) \quad (17)$$

więc macierz rzutowania

$$p = Pb \quad (18)$$

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T \quad (19)$$

Metoda (?) Najmniejszych Kwadratów, to właściwie kryterium rozwiązania,

Metoda (?) Najmniejszych Kwadratów, to właściwie kryterium rozwiązania,

- w rachunku różniczkowym jest to minimalizacja funkcji celu

Metoda (?) Najmniejszych Kwadratów, to właściwie kryterium rozwiązania,

- w rachunku różniczkowym jest to minimalizacja funkcji celu
- w algebrze liniowej ortogonalność pomiędzy wektorem poprawek a przestrzenią rozpinaną przez kolumny macierzy  $A$

Metoda (?) Najmniejszych Kwadratów, to właściwie kryterium rozwiązania,

- w rachunku różniczkowym jest to minimalizacja funkcji celu
- w algebrze liniowej ortogonalność pomiędzy wektorem poprawek a przestrzenią rozpinaną przez kolumny macierzy  $A$  ( $A^T V = \vec{0}$ ,  $V^T V = \|V\|^2$ )



W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (20)$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

$\hat{\sigma}_0$ , czasem oznaczane jako  $m_0$ , błąd średni typowego spostrzeżenia

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 Q \quad (20)$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

$\hat{\sigma}_0$ , czasem oznaczane jako  $m_0$ , błąd średni typowego spostrzeżenia

$Q$ , macierz kofaktorów

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 Q \quad (20)$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

$\hat{\sigma}_0$ , czasem oznaczane jako  $m_0$ , błąd średni typowego spostrzeżenia

$Q$ , macierz kofaktorów

Macierz wag

$$P \sim Q^{-1} \quad (21)$$

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 Q \quad (20)$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

$\hat{\sigma}_0$ , czasem oznaczane jako  $m_0$ , błąd średni typowego spostrzeżenia

$Q$ , macierz kofaktorów

Macierz wag

$$P \sim Q^{-1} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{m_n^2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$V = Ax + L \tag{22}$$

$$V = Ax + L \quad (22)$$

Funkcja celu

$$V^T PV = \min$$



$$V = Ax + L \quad (22)$$

Funkcja celu

$$V^T P V = \min \quad (23)$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^T P V}{\partial x} = \frac{1}{2} V^T P A \quad (24)$$

$$V = Ax + L \quad (22)$$

Funkcja celu

$$V^T P V = \min \quad (23)$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^T P V}{\partial x} = \frac{1}{2} V^T P A \quad (24)$$

$$A^T P V = 0 \quad (25)$$

$$V = Ax + L \quad (22)$$

Funkcja celu

$$V^T PV = \min \quad (23)$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^T PV}{\partial x} = \frac{1}{2} V^T PA \quad (24)$$

$$A^T PV = 0 \quad (25)$$

Rozwiązanie równań normalnych

$$\hat{x} = -(A^T PA)^{-1} \cdot (A^T PL) \quad (26)$$

$$V = Ax + L \quad (22)$$

Funkcja celu

$$V^T P V = \min \quad (23)$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^T P V}{\partial x} = \frac{1}{2} V^T P A \quad (24)$$

$$A^T P V = 0 \quad (25)$$

Rozwiązanie równań normalnych

$$\hat{x} = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (26)$$

Estymator błędu średniego typowego spostrzeżenia

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{n - r} \quad (27)$$