1. Analiza harmoniczna – transformacja Fouriera

1.1. Zadanie do wykonania

Należy przeprowadzić **analizę widmową** (zwaną też **analizą harmoniczną**) dla danych grawimetrycznych z Józefosławia — grawimetr sprężynowy LCR ET26. Proszę podać częstotliwości wyróżnionych fal pływowych i ich amplitudy. Proszę również wykonać wykres widma z odpowiednio opisanymi osiami i wartościami.

1.2. Krótkie podsumowanie treści wykładowych

Analiza widmowa pozwala znaleźć składowe harmoniczne (szereg sinusoid, ich **amplitudy** i **częstotliwości**) w analizowanym sygnale. Jest to nadzwyczaj użyteczna technika, nie tylko w pływach lecz w całej geodezji jak i w innych dziedzinach nauki i życia. Transformacja i odwrotna transformacja Fouriera pozwalają na zmianę sygnału z dziedziny czasu na dziedzinę częstotliwości i odwrotnie.

Stosujemy analizę harmoniczną do ciągłych stacjonarnych pomiarów grawimetrycznych jako przykład jej zastosowania. Zjawisko, które opracowujemy jest szczególnie dobrym przykładem dydaktycznym, jako że pływy ziemskie to złożenie wielu (wielu tysięcy) sygnałów okresowych, z których każda nazywa się falą pływową. Wśród tych wszystkich fal pływowych kilkanaście jest dominujących i te właśnie częstotliwości i amplitudy w tym zadaniu wyznaczamy.

Fragment danych przedstawiony jest poniżej — dane są podane w formacie `yyyy mm dd hh mm ss g`, co oznacza odpowiednio rok, miesiąc, dzień, godzinę, minutę i sekundę oraz wartość przyspieszenia siły ciężkości w $\mathrm{nm\,s^{-2}}$.

```
2007  1  2  16  0  0   −1059.343
2007  1  2  17  0  0   −1374.666
2007  1  2  18  0  0   −1783.991
2007  1  2  19  0  0   −2227.802
```

Załączone dane są wolne od „dziur". W przypadku szybkiej transformacji Fouriera nierównomierność próbkowania sygnału jest dużym problemem, nie można stosować tych algorytmów dla nierównomiernie próbkowanych danych. Z danych należy wybrać swój podzbiór określony datami indywidualnie według wskazania prowadzącego projekt.

Do obliczeń można wykorzystać istniejące oprogramowanie. Spośród bardzo wielu możliwości można, wykorzystać `Matlaba` lub jego odpowiednik `Octave'a`.

Poniżej podaje przykładowy skrypt rozwiązujący część zadania w `Octave'ie` (linie komentarza zaczynają się od znaku `%`).

```
% Wczytanie danych z pliku do macierzy A
```

```
A = load ("./zestawy/dane0.dat");

% Ile pozycji jest w danych
L=length(A);

% Wykorzystanie wbudowanej funkcji fft. Szybka transformata fouriera
% wymaga, zeby liczba danych byla potega dwojki, dlatego
% wykorzystujemy funkcje 'nextpow2'
% (patrz wyjasnienia w instrukcji Matlaba/Octave'a).
FFT=fft(A(:,7), 2^nextpow2(L))/L;

% Czestotliwosc i amplituda
freq = 1/2 * linspace(0,1,2^nextpow2(L)/2 + 1)';
ampl = 2 * abs(FFT(1:(2^nextpow2(L)/2 + 1)));

% Mielismy dane godzinne a wyniki chcemy w cpd
freq = freq * 24;

% I zapis pliku wynikowego
fid = fopen('wyniki.dat','w');
for i=1:length(freq)
    fprintf(fid,"%10.3f %10.3f\n",freq(i),ampl(i))
end
```

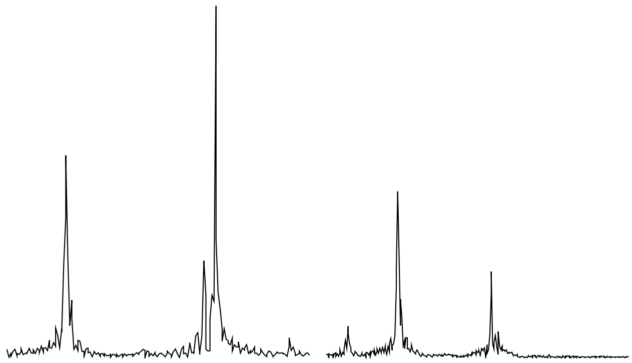
Tak naprawdę właściwie każdy język programowania mający zastosowanie w nauce, ma wbudowaną funkcję, lub specjalne biblioteki do obliczania transformacji Fouriera. Można tu wymienić np. bibliotekę `numpy`. Nawet w Excelu jest to możliwe do zrobienia.

Można też wykorzystać program dedykowany do nieprecyzyjnych opracowań obserwacji grawimetrycznych — `Tsoft`[1]. Łatwe w użyciu oprogramowanie do analizy szeregów czasowych. Obszerna dokumentacja i pliki pomocy, a także graficzny interfejs użytkownika pozwalają na łatwe rozwiązanie problemu.

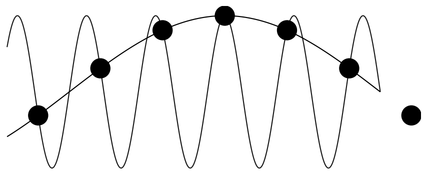
Na rysunku 3 przedstawione jest schematyczne (ale uwaga dalekie od kompletności) rozwiązanie. Dysponując danymi grawimetrycznymi (pokazanymi po lewej stronie rysunku) w dziedzinie czasu, możemy po przejściu do dziedziny częstotliwości wyznaczyć częstotliwości i amplitudy głównych sygnałów składających się na nasze dane. W środku i po prawej stronie rysunku 3 znajdują się wybrane fragmenty uzyskanego widma. Jest to odpowiednio pasmo dobowe i półdobowe (uwaga na nieciągłość, pomiędzy tymi rysunkami). Celowo nie jest pokazane całe widmo, gdyż w pozostałych zakresach częstotliwości nie znajdziemy wielu szczegółów. Również ze względu na dryft musimy odrzucić wszystkie wartości dla częstotliwości poniżej 0.7 cpd (cykli na dobę) i ograniczyć się do wyznaczania sygnałów w zakresie fal dobowych i półdobowych. Przy starannym opracowaniu można także zauważyć jeden mały pik w okolicy częstotliwości 3 cpd.

Warto w tej instrukcji również przypomnieć o ograniczeniu w wyznaczaniu wysokich częstotliwości do podwójnej wartości częstotliwości próbkowania. Jest to związane z pro-

[1] `http://seismologie.oma.be/TSOFT/tsoft.html`



Rysunek 1. Schematyczny wynik analizy widmowej (opis w tekście)



Rysunek 2. Aliasing (wyjaśnienia w tekście)

blemem aliasingu, który został przedstawiony na rysunku 4. Można znaleźć wiele sygnałów o wysokich częstotliwościach (powyżej częstotliwości Nyquista), które będą pasowały w dane pomiarowe.

Na rysunku 3 celowo nie ma opisu żadnej z osi (ani osi w ogóle), żeby nie sugerować gotowych odpowiedzi, ale proszę zwrócić na uwagę, że zmiany przyspieszenia mogą sięgać kilku tysięcy $\mathrm{nm\,s^{-2}}$, a amplitudy największych fal to wartości rzędu setek $\mathrm{nm\,s^{-2}}$.

Do sprawozdania wystarczy z pliku lub wykresu odczytać częstotliwości i amplitudy głównych pików w widmie (**fal pływowych**). Można się również pokusić o ich nazwanie na podstawie częstotliwości[2]. Fragment takiego katalogu jest zamieszczony poniżej. Pierwsze siedem wartości to argumenty Doodsona (patrz wykład), następnie częstotliwość (w stopniach na godzinę) a później wartość cosinusowa i sinusowa fali pływowej. W ostatniej kolumnie podane są nazwy dla największych fal pływowych.

```
 2  0  0  0  0  0  0  0.00000000-8695028819.        0.  M0S0
 3  0  0  0  1  0  0  0.00464181           0.  -5631229.
 3  0  0  0  1  1  0  0.00684822           0.   -868055.
 2  0  0  0  2  1  0  0.01149003     1177773.        0.
```

[2] katalog potencjału pływowego dostępny jest tutaj: `http://www.eas.slu.edu/GGP/ETERNA34/COMMDAT/HW95S.DAT`

2	0	0	1	0	−1	−1	0.03886027	−1177773.	0.	
2	0	0	1	0	0	−1	0.04106668	−136150588.	0.	SA
2	0	0	1	0	0	1	0.04107060	7066640.	0.	
2	0	0	2	0	0	−2	0.08213336	−3179988.	0.	
2	0	0	2	0	0	0	0.08213728	−856594487.	0.	SSA
2	0	0	3	0	0	−1	0.12320396	−49937586.	0.	STA

Na koniec zwracam uwagę, że często przy analizie harmonicznej wykorzystuje się **moc widmową**. W przypadku naszych danych jednostką mocy widmowej były by $(\mathrm{nm/s^2})^2/\mathrm{Hz}$. W przypadku widma amplitudowego mamy wprost amplitudy fal pływowych — $\mathrm{nm\,s^{-2}}$.

1.3. Dane do zadania

Na stronie internetowej `www.grat.gik.pw.edu.pl/dydaktyka` załączone są wszystkie dane w postaci cyfrowej.

2. Analiza harmoniczna – Metoda Najmniejszych Kwadratów

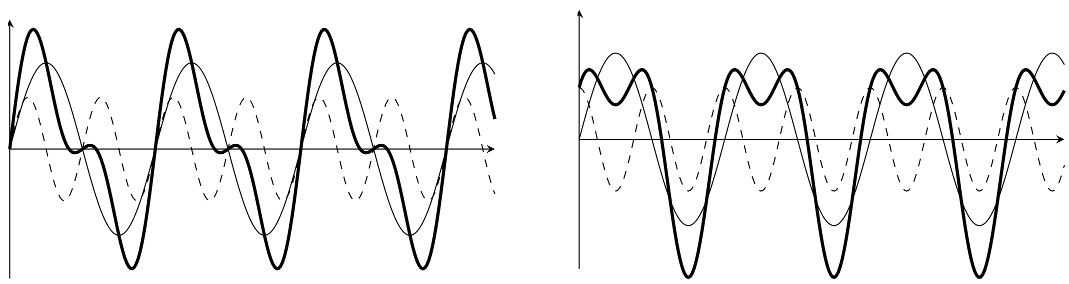
2.1. Zadanie do wykonania

Należy znaleźć amplitudy i fazy wybranych fal pływowych metodą najmniejszych kwadratów.

2.2. Informacje uzupełniające

Zadanie to jest kontynuacją zadania z rozdziału 7. Pracujemy na tych samych danych. W poprzednim projekcie nie uzyskaliśmy żadnej informacji o fazie fal pływowych. Uzyskanie informacji o fazie jest możliwe z rozwiązania szybkiej transformacji Fouriera w dziedzinie liczb zespolonych. Jednak dokładność takiego rozwiązania w przypadku fazy może być mało dokładna. Problem z używaniem tylko widma amplitudowego w analizie harmonicznej ilustruje rysunek 5. Pokazuje on, że w przypadku dwóch całkowicie różnych sygnałów (linie pogrubione na obu wykresach), widmo amplitudowe o którym była mowa w rozdziale 7 będzie takie samo. Oba te sygnały są złożeniem dwóch prostych sinusoid zaznaczonych jako linia cienka i linia przerywana. W poprzednim rozwiązaniu dostalibyśmy dokładnie takie same amplitudy i częstotliwości obu sygnałów. Wynika to z tego, że amplitydy i częstotliwości obu składowych w obu przypadkach są takie same.

Zjawiska pływowe są dość szczególne, ponieważ częstotliwości fal pływowych, jako pochodne wielu częstotliwości astronomicznych, są bardzo dokładnie znane. Zamiast wyznaczać te częstotliwości można je wziąć z katalogu potencjału pływowego. Z drugiej strony często w przesunięciu fazowym zawarta jest istotna informacja geofizyczna i te fazy chcemy znać z dużą dokładnością. W najbardziej precyzyjnych opracowaniach stosuje się metodę najmniejszych kwadratów, którą tutaj w nieco uproszczonej wersji zastosujemy.



Rysunek 3. Problem z niejednoznacznością fazy

Istotą problemu jest ułożenie odpowiedniego układu równań obserwacyjnych. Zapiszmy, że wypadkowy sygnał możemy zapisać jako złożenie n fal pływowych,

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \tag{1}$$

gdzie A_i to amplituda i-tej fali, ω_i to jej częstość kołowa, a φ_i to jej przesuniecie fazowe. Zmienna y to wartość sygnału w czasie t. Problemem tych równań jest to, że są one nieliniowe, jeżeli naszymi niewiadomymi są A_i oraz φ_i (ω_i w tym przykładzie jest dobrze znana).

Możemy przepisać równanie jednej fali do postaci

$$A\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cdot A\cos(\varphi) - \sin(\omega t) \cdot A\sin(\varphi) \tag{2}$$

I w całym zagadnieniu możemy traktować jako dwie niewiadome $A\cos(\varphi)$ oraz $A\sin(\varphi)$, które są w równaniu 11 w postaci liniowej. Na samym końcu można te wielkości rozdzielić i policzyć amplitudę oraz fazę według wzorów

$$A = \sqrt{(A\cos(\varphi))^2 + (A\sin(\varphi))^2}, \tag{3}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A\sin(\varphi)}{A\cos(\varphi)}, \tag{4}$$

i wyznaczyć pożądane wielkości dla każdej fali pływowej, które rozpatrujemy.

W zadaniu należy wybrać kilka największych fal pływowych na podstawie wyników z rozdziału 7.

Ważną kwestią[3] w celu wiarygodnego wyznaczenia amplitud i faz jest uwzględnienie dryftu i stałego przesunięcia wartości.

Z tym problemem można sobie poradzić albo poprzez filtracje i odcięcie niskich częstotliwości z naszego sygnału, albo poprze zamodelowanie dryftu jako wielomianu wyższego stopnia[4].

Ogólne równanie obserwacyjne przyjmie teraz postać,

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} P_i t^i + \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \tag{5}$$

, gdzie P_i to niewiadome współczynniki wielomianu.

[3] proszę to numerycznie sprawdzić

[4] ponowne sprawdzenie do jakiego stopnia wielomianu wpasowanie dryftu jest wystarczające można sprawdzić testując numerycznie różne rozwiązania i sprawdzać sygnał resydualny i błędy wyznaczanych parametrów

Macierz kształtu w zagadnieniu wyrównawczym przyjmie postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^m & \cos(\omega_1 t_1) & -\sin(\omega_1 t_1) & \dots & \cos(\omega_n t_2) & -\sin(\omega_n t_2) \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^m & \cos(\omega_1 t_2) & -\sin(\omega_1 t_2) & \dots & \cos(\omega_n t_2) & -\sin(\omega_n t_2) \\ \dots \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^m & \cos(\omega_1 t_1) & -\sin(\omega_1 t_1) & \dots & \cos(\omega_n t_1) & -\sin(\omega_n t_1) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

gdzie t_1, t_2 aż do t_k to kolejne momenty czasu próbkowania sygnału. Ta metoda w przeciwieństwie to szybkiej transformacji Fouriera nie wymaga próbkowania sygnału w stałych odstępach.

Liczba kolumn macierzy A jest równa $1 + m + 2 \cdot n$ czyli stopień wpasowywanego wielomianu zwiększony o jeden plus podwojona liczba uwzględnianych fal pływowych.

Rozwiązanie to realizacja znanego z rachunku wyrównawczego wzoru na estymacje parametrów w metodzie najmniejszych kwadratów. Wektor wyrazów wolnych będzie równy wektorowi obserwacji z przeciwnym znakiem.

Jako przykład złożonego pakietu ściśle przeznaczonego do opracowania obserwacji pływowych, zostanie przedstawiony pakiet `eterna`[5]. Nauczenie obsługi tego pakietu nie jest główną treścią tych zajęć, więc etap ten ograniczy się do krótkiej prezentacji przez prowadzącego projekt.

2.3. Dane do zadania

Na stronie internetowej `www.grat.gik.pw.edu.pl/dydaktyka` załączone są wszystkie dane w postaci cyfrowej.

[5] `http://www.eas.slu.edu/GGP/ETERNA34/`

3. Analiza harmoniczna – metoda Lomba-Scargla, periodogramy i spektrogramy

3.1. Zadanie do wykonania

Przeprowadzić analizę widmową metodą Lomba-Scargle dla danych grawimetrycznych przedstawionych w rozdziałach 7 oraz 8. Z danych poprzednio używanych należy losowo usunąć 20% obserwacji, tak aby nasz sygnał nie był równomiernie próbkowany.

Wyniki amplitud porównać z wcześniejszymi wyznaczeniami (sekcje 7 i 8).

Utworzyć periodogram i spektrogram (z oknem o szerokości jeden dzień) analizowanego sygnału.

3.2. Informacje uzupełniające

Metoda Lomba-Scargle jest współcześnie powszechnie stosowana do analizy widmowej sygnałów ze szczególnym zastosowaniem w astronomii i naukach o Ziemi. Jest to również metoda opierająca się na metodzie najmniejszych kwadratów (patrz sekcja 8). Jest ona znacznie bardziej wymagająca jeżeli chodzi zasoby sprzętowe i złożoność obliczeniową w porównaniu z szybką transformacją Fouriera, co stanowiło dawniej przeszkodę w jej powszechnym wykorzystaniu w programach komputerowych. Obecne optymalizacje i rozwój infrastruktury informatycznej powodują, że metoda ta może być stosowana nawet do dużych zbiorów danych. Jej największą zaletą jest to, że dane nie muszą być próbkowane w stałych odstępach czasu.

Zadanie wykonane zostanie w oparciu o dostępne rozwiązania. Na zajęciach pokazane zostaną możliwości `Matalaba` i bibliotekę `numpy`. Zadaniem studenta będzie samodzielne wyznaczenie amplitud dla zadanych częstotliwości na podstawie dostępnej dokumentacji. Drugą częścią zadania będzie przygotowanie spektrogramu, również w oparciu o gotowe rozwiązania. Istotnym elementem zajęć projektowych jest interpretacja otrzymanych wizualizacji.