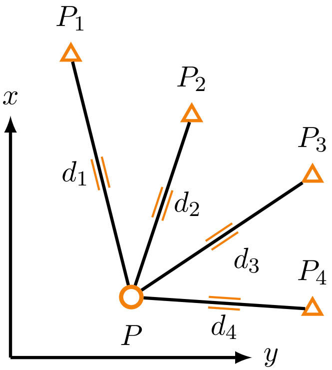
# Zadanie – wariant 1




$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1400,200 & 2389,750 \\ 1450,080 & 2550,150 \\ 1359,880 & 2640,360 \\ 1219,960 & 2589,840 \end{bmatrix} \text{[m]}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151,581 \\ 244,275 \\ 255,235 \\ 182,312 \end{bmatrix} \text{[m]}, \qquad \begin{bmatrix} m_{d_1} \\ m_{d_2} \\ m_{d_3} \\ m_{d_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix} \text{[mm]}$$

Zakładając, że współrzędne przybliżone wynoszą:
$X_P^0 = [1250,180; 2409,860]$ [m], obliczyć:

- błąd położenia punktu $P$,
- błędy średnie wyrównanych odległości,
- błąd średni azymutu $A_{P-P2}$,
- błąd średni funkcji $u = \ln \frac{Y_{P1} - \hat{Y}_P}{X_{P1} - \hat{X}_P}$,
- korelację pomiędzy składowymi $\hat{X}_P$ i $\hat{Y}_P$,

Zakładając, że współrzędne przybliżone wynoszą:
$X_P^0 = [1250,180; 2409,860]$ [m], obliczyć:

- błąd położenia punktu $P$,
- błędy średnie wyrównanych odległości,
- błąd średni azymutu $A_{P-P2}$,

$$u = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y_{P2} - Y_P}{X_{P2} - X_P}\right); \quad C_u = D \cdot C_X D^{\mathrm{T}}; \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X_P} & \frac{\partial u}{\partial Y_P} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial X_P} = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y_{P2}-Y_P}{X_{P2}-X_P}\right)^2} \cdot \frac{\partial\left(\frac{Y_{P2}-Y_P}{X_{P2}-X_P}\right)}{\partial X_P} =$$

$$= \frac{(X_{P2} - X_P)^2}{(X_{P2} - X_P)^2 + (Y_{P2} - Y_P)^2} \cdot (-1) \cdot \frac{Y_{P2} - Y_P}{(X_{P2} - X_P)^2} \cdot (-1) =$$

$$= \frac{\Delta Y_{P-P2}}{d_{P-P2}^2}$$

- błąd średni funkcji $u = \ln \frac{Y_{P1}-\hat{Y}_P}{X_{P1}-\hat{X}_P}$,
- korelację pomiędzy składowymi $\hat{X}_P$ i $\hat{Y}_P$,

Zakładając, że współrzędne przybliżone wynoszą:
$X_P^0 = [1250,180; 2409,860]$ [m], obliczyć:

- błąd położenia punktu $P$,
- błędy średnie wyrównanych odległości,
- błąd średni azymutu $A_{P-P2}$,

$$u = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y_{P2} - Y_P}{X_{P2} - X_P}\right); \quad C_u = D \cdot C_X D^{\mathrm{T}}; \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X_P} & \frac{\partial u}{\partial Y_P} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y_P} = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y_{P2}-Y_P}{X_{P2}-X_P}\right)^2} \cdot \frac{\partial\left(\frac{Y_{P2}-Y_P}{X_{P2}-X_P}\right)}{\partial Y_P} =$$

$$= \frac{(X_{P2} - X_P)^2}{(X_{P2} - X_P)^2 + (Y_{P2} - Y_P)^2} \cdot (-1) \cdot \frac{Y_{P2} - Y_P}{(X_{P2} - X_P)^2} \cdot (-1) =$$

$$= -\frac{\Delta X_{P-P2}}{d^2_{P-P2}}$$

- błąd średni funkcji $u = \ln \frac{Y_{P1} - \hat{Y}_P}{X_{P1} - \hat{X}_P}$,
- korelację pomiędzy składowymi $\hat{X}_P$ i $\hat{Y}_P$,

Zakładając, że współrzędne przybliżone wynoszą:
$X_P^0 = [1250, 180; 2409, 860]$ [m], obliczyć:

- błąd położenia punktu $P$,
- błędy średnie wyrównanych odległości,
- błąd średni azymutu $A_{P-P2}$,
- błąd średni funkcji $u = \ln \frac{Y_{P1}-\hat{Y}_P}{X_{P1}-\hat{X}_P}$,

$$C_u = D \cdot C_X D^{\mathrm{T}}; \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X_P} & \frac{\partial u}{\partial Y_P} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial X_P} = \frac{X_{P1} - \hat{X}_P}{Y_{P1} - \hat{Y}_P} \cdot \frac{\partial \left( \frac{Y_{P1}-\hat{Y}_P}{X_{P1}-\hat{X}_P} \right)}{\partial X_P} = \frac{1}{X_{P1} - \hat{X}_P}$$

- korelację pomiędzy składowymi $\hat{X}_P$ i $\hat{Y}_P$,

Zakładając, że współrzędne przybliżone wynoszą:
$X_P^0 = [1250,180; 2409,860]$ [m], obliczyć:

- błąd położenia punktu $P$,
- błędy średnie wyrównanych odległości,
- błąd średni azymutu $A_{P-P2}$,
- błąd średni funkcji $u = \ln \frac{Y_{P1} - \hat{Y}_P}{X_{P1} - \hat{X}_P}$,

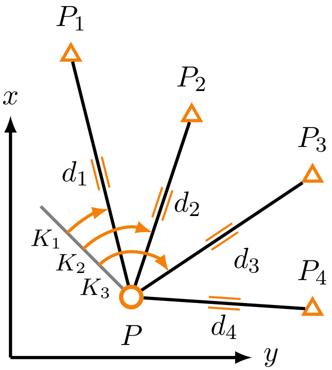
$$C_u = D \cdot C_X D^{\mathrm{T}}; \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X_P} & \frac{\partial u}{\partial Y_P} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y_P} = \frac{X_{P1} - \hat{X}_P}{Y_{P1} - \hat{Y}_P} \cdot \frac{\partial \left( \frac{Y_{P1} - \hat{Y}_P}{X_{P1} - \hat{X}_P} \right)}{\partial Y_P} = -\frac{1}{Y_{P1} - \hat{Y}_P}$$

- korelację pomiędzy składowymi $\hat{X}_P$ i $\hat{Y}_P$,

- błąd położenia punktu $P$,
- błędy średnie wyrównanych odległości,
- błąd średni azymutu $A_{P-P2}$,
- błąd średni funkcji $u = \ln \frac{Y_{P1} - \hat{Y}_P}{X_{P1} - \hat{X}_P}$,
- korelację pomiędzy składowymi $\hat{X}_P$ i $\hat{Y}_P$,
- **elipsę błędu średniego.**

# Zadanie – wariant 2

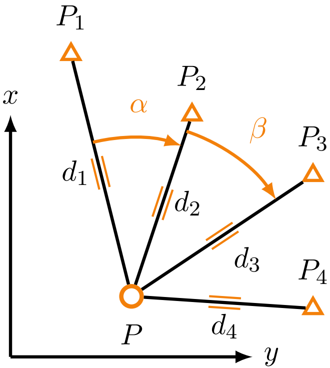



$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1400,200 & 2389,750 \\ 1450,080 & 2550,150 \\ 1359,880 & 2640,360 \\ 1219,960 & 2589,840 \end{bmatrix} [\mathsf{m}]$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151,581 \\ 244,275 \\ 255,235 \\ 182,312 \end{bmatrix} [\mathsf{m}], \quad \begin{bmatrix} m_{d_1} \\ m_{d_2} \\ m_{d_3} \\ m_{d_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix} [\mathsf{mm}]$$

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20{,}3450^{\,g} \\ 67{,}7770^{\,g} \\ 100{,}5460^{\,g} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m_{K_1} \\ m_{K_2} \\ m_{K_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{\,cc} \\ 10^{\,cc} \\ 10^{\,cc} \end{bmatrix}$$

# Zadanie – wariant 3



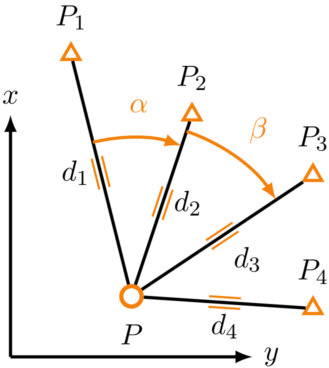

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1400,200 & 2389,750 \\ 1450,080 & 2550,150 \\ 1359,880 & 2640,360 \\ 1219,960 & 2589,840 \end{bmatrix} \text{[m]}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151,581 \\ 244,275 \\ 255,235 \\ 182,312 \end{bmatrix} \text{[m]}, \quad \begin{bmatrix} m_{d_1} \\ m_{d_2} \\ m_{d_3} \\ m_{d_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix} \text{[mm]}$$

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20{,}3450^{\,g} \\ 67{,}7770^{\,g} \\ 100{,}5460^{\,g} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m_{K_1} \\ m_{K_2} \\ m_{K_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{\,cc} \\ 10^{\,cc} \\ 10^{\,cc} \end{bmatrix}$$

Używając pseudoobserwacji $\alpha$ i $\beta$ i zakładając niezależność pomiarów obu kątów.

# Zadanie – wariant 4




$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1400,200 & 2389,750 \\ 1450,080 & 2550,150 \\ 1359,880 & 2640,360 \\ 1219,960 & 2589,840 \end{bmatrix} \text{[m]}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151,581 \\ 244,275 \\ 255,235 \\ 182,312 \end{bmatrix} \text{[m]}, \quad \begin{bmatrix} m_{d_1} \\ m_{d_2} \\ m_{d_3} \\ m_{d_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix} \text{[mm]}$$

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20{,}3450^{\text{g}} \\ 67{,}7770^{\text{g}} \\ 100{,}5460^{\text{g}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m_{K_1} \\ m_{K_2} \\ m_{K_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{\text{cc}} \\ 10^{\text{cc}} \\ 10^{\text{cc}} \end{bmatrix}$$

Używając pseudoobserwacji $\alpha$ i $\beta$ z uwzględnieniem zależności pomiędzy pomiarami kątów.

Podsumowanie: Rozwiązać wszystkie podpunkty zadania w czterech wariantach.

- Wariant 1, używając 4 odległości,
- Wariant 2, używając 4 odległości i 3 kierunków,
- Wariant 3, używając 4 odległości i 2 kątów ($\mathrm{cov}(\alpha, \beta) = 0$)
- Wariant 4, używając 4 odległości i 2 kątów ($\mathrm{cov}(\alpha, \beta)$ z prawa propagacji kowariancji i macierzy kofaktorów pomierzonych kierunków).

- błąd położenia punktu $P$,
- błędy średnie wyrównanych odległości,
- błąd średni azymutu $A_{P-P2}$,
- błąd średni funkcji $u = \ln \frac{Y_{P1} - \hat{Y}_P}{X_{P1} - \hat{X}_P}$,
- korelację pomiędzy składowymi $\hat{X}_P$ i $\hat{Y}_P$,
- **elipsę błędu średniego.**

# Jak uwzględnić zależność pomiędzy kątami w wariancie czwartym?

$$P = Q^{-1}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} m_{d_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{d_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{d_3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{d_4}^2 \end{bmatrix}$$

# Jak uwzględnić zależność pomiędzy kątami w wariancie czwartym?

$$P = Q^{-1}$$

$$Q_2 = \left[\begin{array}{cccc|ccc} m_{d_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{d_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{d_3}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{d_4}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & m_{k_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{k_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{k_3}^2 \end{array}\right]$$

# Jak uwzględnić zależność pomiędzy kątami w wariancie czwartym?

$$P = Q^{-1}$$

$$Q_3 = \left[\begin{array}{cccc|cc} m_{d_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{d_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{d_3}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{d_4}^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & m_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_\beta^2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} m_\alpha^2 & \mathrm{cov}(\alpha, \beta) \\ \mathrm{cov}(\beta, \alpha) & m_\beta^2 \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} m_{k_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{k_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{k_3}^2 \end{bmatrix} \cdot D^{\mathrm{T}}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Jak uwzględnić zależność pomiędzy kątami w wariancie czwartym?

$$P = Q^{-1}$$

$$Q_4 = \left[\begin{array}{cccc|cc} m_{d_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{d_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{d_3}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{d_4}^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & m_\alpha^2 & \mathrm{cov}(\alpha, \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{cov}(\beta, \alpha) & m_\beta^2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} m_\alpha^2 & \mathrm{cov}(\alpha, \beta) \\ \mathrm{cov}(\beta, \alpha) & m_\beta^2 \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} m_{k_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{k_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{k_3}^2 \end{bmatrix} \cdot D^{\mathrm{T}}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$