Kontrola $V^{\mathrm{T}}PV$

$$
\begin{aligned}
\hat{V}^{\mathrm{T}}P\hat{V} = (A\hat{X}+L)^{\mathrm{T}}P(A\hat{X}+L) = \\
(\hat{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+L^{\mathrm{T}})P(A\hat{X}+L) = \\
X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}PA\hat{X}+\hat{X}+\hat{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}PL+L^{\mathrm{T}}PA\hat{X}+L^{\mathrm{T}}PL = \\
\hat{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}PA(-(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}(A^{\mathrm{T}}PL))+\hat{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}PL+L^{\mathrm{T}}PA\hat{X}+L^{\mathrm{T}}PL = \\
-\hat{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}PL+\hat{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}PL+L^{\mathrm{T}}PA\hat{X}+L^{\mathrm{T}}PL =
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\hat{V}^{\mathrm{T}}P\hat{V} = L^{\mathrm{T}}PA\hat{X}+L^{\mathrm{T}}PL \tag{2}
$$

Ocena dokładności wyrównania

Błąd średni typowego spostrzeżenia

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^{\mathrm{T}}PV}{(n-r)} \tag{3}$$

Ocena dokładności wyrównania

Błąd średni typowego spostrzeżenia

$$\hat{\sigma}_0^2 = m_0^2 = \frac{V^{\mathrm{T}} P V}{(n - r)} \tag{3}$$

Ocena dokładności wyrównania

Błąd średni typowego spostrzeżenia

$$\hat{\sigma}_0^2 = m_0^2 = \frac{V^{\mathrm{T}}PV}{(n-r)} \tag{3}$$

wielkość niemianowana, wartość większa od 1 oznacza, że błędy średnie *a priori* były niedoszacowane (zbyt optymistyczne), a wartość mniejsza od 1 oznacza, że przyjęte wstępnie błędy średnie były większe niż rzeczywiste.

$C_{\hat{X}}$

Macierz kowariancyjna (wariancyjno-kowariancyjna) wektora niewiadomych,

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \tag{4}$$

$C_{\hat{X}}$

Macierz kowariancyjna (wariancyjno-kowariancyjna) wektora niewiadomych,

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \tag{4}$$

$$C_{\hat{X}} = D \cdot C_L \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$C_{\hat{X}}$

Macierz kowariancyjna (wariancyjno-kowariancyjna) wektora niewiadomych,

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \tag{4}$$

$$C_{\hat{X}} = D \cdot C_L \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$D = -(A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} A^{\mathrm{T}} P \tag{6}$$

$C_{\hat{X}}$

Macierz kowariancyjna (wariancyjno-kowariancyjna) wektora niewiadomych,

$$C_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \tag{4}$$

$$C_{\hat{X}} = D \cdot C_L \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$D = -(A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} A^{\mathrm{T}} P \tag{6}$$

$$\begin{aligned} C_{\hat{X}} = -(A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} A^{\mathrm{T}} P \cdot \sigma_0^2 P^{-1} \cdot (-PA(A^{\mathrm{T}} P A^{-1})) = \\ = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \cdot A^{\mathrm{T}} P P^{-1} P A (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} = \\ = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

$C_{\hat{X}}$

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} m^2_{\hat{X}_1} & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_r) \\ \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_1) & m^2_{\hat{X}_2} & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_3) & \dots & \text{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_1) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_2) & \text{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_r) & \dots & m^2_{\hat{X}_r} \end{bmatrix}$$

$C_{\hat{X}}$

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} m^2_{\hat{X}_1} & \mathrm{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_2) & \mathrm{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_3) & \dots & \mathrm{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_r) \\ \mathrm{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_1) & m^2_{\hat{X}_2} & \mathrm{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_3) & \dots & \mathrm{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_1) & \mathrm{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_2) & \mathrm{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_r) & \dots & m^2_{\hat{X}_r} \end{bmatrix}$$

Macierz symetryczna ($\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathrm{cov}(X_j, X_i)$), na przekątnej wariancje (błędy średnie elementów wektora niewiadomych), a poza przekątnymi kowariancje.

$C_{\hat{X}}$

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} m^2_{\hat{X}_1} & \mathrm{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_2) & \mathrm{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_3) & \dots & \mathrm{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_r) \\ \mathrm{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_1) & m^2_{\hat{X}_2} & \mathrm{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_3) & \dots & \mathrm{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_1) & \mathrm{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_2) & \mathrm{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_r) & \dots & m^2_{\hat{X}_r} \end{bmatrix}$$

Macierz symetryczna ($\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathrm{cov}(X_j, X_i)$), na przekątnej wariancje (błędy średnie elementów wektora niewiadomych), a poza przekątnymi kowariancje.
Błędy średnie poszczególnych estymatorów wektora niewiadomych po wyrównaniu można obliczyć jako $m_{\hat{X}_i} = \sqrt{C_{\hat{X}_{ii}}}$.

$C_{\hat{X}}$

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} m^2_{\hat{X}_1} & \mathrm{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_2) & \mathrm{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_3) & \dots & \mathrm{cov}(\hat{X}_1, \hat{X}_r) \\ \mathrm{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_1) & m^2_{\hat{X}_2} & \mathrm{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_3) & \dots & \mathrm{cov}(\hat{X}_2, \hat{X}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_1) & \mathrm{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_2) & \mathrm{cov}(\hat{X}_r, \hat{X}_r) & \dots & m^2_{\hat{X}_r} \end{bmatrix}$$

Macierz symetryczna ($\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathrm{cov}(X_j, X_i)$), na przekątnej wariancje (błędy średnie elementów wektora niewiadomych), a poza przekątnymi kowariancje.
Błędy średnie poszczególnych estymatorów wektora niewiadomych po wyrównaniu można obliczyć jako $m_{\hat{X}_i} = \sqrt{C_{\hat{X}_{ii}}}$.
Policzenie $A^{\mathrm{T}}PA$ nie wymaga znajomości obserwacji (wektora L) – względne ocena dokładności – wstępna analiza dokładności.

$C_{\hat{V}}$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L$$

$C_{\hat{V}}$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P) \cdot L \tag{8}$$

$C_{\hat{V}}$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P) \cdot L \tag{8}$$

$$C_{\hat{V}} = D \cdot C_L \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$C_{\hat{V}}$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P) \cdot L \tag{8}$$

$$C_{\hat{V}} = D \cdot C_L \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$D = (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P) \tag{10}$$

$C_{\hat{V}}$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P) \cdot L \tag{8}$$

$$C_{\hat{V}} = D \cdot C_L \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$D = (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P) \tag{10}$$

$$C_{\hat{V}} = \sigma_0^2(P^{-1} - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}) \tag{11}$$

$C_{\hat{V}}$

$$\hat{V} = A\hat{X} + L = (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P) \cdot L \tag{8}$$

$$C_{\hat{V}} = D \cdot C_L \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$D = (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P) \tag{10}$$

$$C_{\hat{V}} = \sigma_0^2(P^{-1} - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}) \tag{11}$$

Błędy średnie poszczególnych estymatorów wektora poprawek można obliczyć jako $m_{\hat{V}_i} = \sqrt{C_{\hat{V}_{ii}}}$.

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V}$$

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P)) \cdot (-h^{ob} + h^{0}) \quad (12)$$

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P)) \cdot (-h^{ob} + h^{0}) \quad (12)$$

$$C_{\hat{h}} = D \cdot C_{h^{ob}} \cdot D^{\mathrm{T}} \quad (13)$$

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P)) \cdot (-h^{ob} + h^{0}) \quad (12)$$

$$C_{\hat{h}} = D \cdot C_{h^{ob}} \cdot D^{\mathrm{T}} \quad (13)$$

$$D = A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P \quad (14)$$

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P)) \cdot (-h^{ob} + h^{0}) \tag{12}$$

$$C_{\hat{h}} = D \cdot C_{h^{ob}} \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

$$D = A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P \tag{14}$$

$$C_{\hat{h}} = \sigma_0^2(A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}) \tag{15}$$

$C_{\hat{h}}$

$$\hat{h} = h^{ob} + \hat{V} = h^{ob} + (I - A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P)) \cdot (-h^{ob} + h^{0}) \quad (12)$$

$$C_{\hat{h}} = D \cdot C_{h^{ob}} \cdot D^{\mathrm{T}} \quad (13)$$

$$D = A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P \quad (14)$$

$$C_{\hat{h}} = \sigma_0^2(A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}) \quad (15)$$

Błędy średnie poszczególnych estymatorów wektora poprawek można obliczyć jako $m_{\hat{h}_i} = \sqrt{C_{\hat{h}_{ii}}}$.

Macierz kowariancyjna funkcji

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ \dots \\ f_n(\vec{X}) \end{bmatrix} \tag{16}$$

Macierz kowariancyjna funkcji

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ \dots \\ f_n(\vec{X}) \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$C_{\vec{u}} = D \cdot C_{\vec{X}} \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

Macierz kowariancyjna funkcji

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ \dots \\ f_n(\vec{X}) \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$C_{\vec{u}} = D \cdot C_{\vec{X}} \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_r} \\ \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_r} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Macierz kowariancyjna funkcji

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ \dots \\ f_n(\vec{X}) \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$C_{\vec{u}} = D \cdot C_{\vec{X}} \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{X})}{\partial X_r} \\ \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{X})}{\partial X_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{X})}{\partial X_r} \end{bmatrix} \tag{18}$$

D – macierz Jacobiego, $|D|$ – jakobian

Ocena dokładności wyrównania – podsumowanie

$$\hat{C}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \tag{19}$$

Ocena dokładności wyrównania – podsumowanie

$$\hat{C}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \tag{19}$$

$$\hat{C}_{\hat{V}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(P^{-1} - A \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} A^{\mathrm{T}} \right) \tag{20}$$

Ocena dokładności wyrównania – podsumowanie

$$\hat{C}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \tag{19}$$

$$\hat{C}_{\hat{V}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(P^{-1} - A \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} A^{\mathrm{T}} \right) \tag{20}$$

$$\hat{C}_{\hat{h}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(A \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} A^{\mathrm{T}} \right) \tag{21}$$

Ocena dokładności wyrównania – podsumowanie

$$\hat{C}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \tag{19}$$

$$\hat{C}_{\hat{V}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(P^{-1} - A \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} A^{\mathrm{T}} \right) \tag{20}$$

$$\hat{C}_{\hat{h}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(A \cdot (A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} A^{\mathrm{T}} \right) \tag{21}$$

Prawo propagacji kowariancji

$$C_u = D \cdot \hat{C}_{\hat{x}} \cdot D^{\mathrm{T}} \tag{22}$$