# Rachunek wyrównawczy (z elementami informatyki)

8 października 2019

# Rachunek wyrównawczy (z elementami informatyki)

**8 października 2019**

- Przedmiot kończy się egzaminem. Ocena z wykładów to ocena z egzaminu. Każdy ma możliwość pisania egzaminu w trzech terminach (2$\times$zima, 1$\times$jesień).

# Rachunek wyrównawczy (z elementami informatyki)

**8 października 2019**

- Przedmiot kończy się egzaminem. Ocena z wykładów to ocena z egzaminu. Każdy ma możliwość pisania egzaminu w trzech terminach (2$\times$zima, 1$\times$jesień).
- Zasady zaliczenia ćwiczeń były przedstawione podczas zajęć.

# Rachunek wyrównawczy (z elementami informatyki)

**8 października 2019**

- Przedmiot kończy się egzaminem. Ocena z wykładów to ocena z egzaminu. Każdy ma możliwość pisania egzaminu w trzech terminach (2$\times$zima, 1$\times$jesień).
- Zasady zaliczenia ćwiczeń były przedstawione podczas zajęć.
- Literatura i treści programowe znajdują się w katalogu ECTS.

# Rachunek wyrównawczy (z elementami informatyki)

**8 października 2019**

- Przedmiot kończy się egzaminem. Ocena z wykładów to ocena z egzaminu. Każdy ma możliwość pisania egzaminu w trzech terminach (2×zima, 1×jesień).
- Zasady zaliczenia ćwiczeń były przedstawione podczas zajęć.
- Literatura i treści programowe znajdują się w katalogu ECTS.
- `http://www.grat.gik.pw.edu.pl/dydaktyka`
  zakładka -> rw

# Rachunek wyrównawczy (z elementami informatyki)

**8 października 2019**

- Przedmiot kończy się egzaminem. Ocena z wykładów to ocena z egzaminu. Każdy ma możliwość pisania egzaminu w trzech terminach (2×zima, 1×jesień).
- Zasady zaliczenia ćwiczeń były przedstawione podczas zajęć.
- Literatura i treści programowe znajdują się w katalogu ECTS.
- `http://www.grat.gik.pw.edu.pl/dydaktyka`
  zakładka -> rw
- wszelkie sprawy: `marcin.rajner@pw.edu.pl`
  konsultacje wtorki 11-12 s. 33b

# Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \tag{1}$$

Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \tag{1}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}}V$$

Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \tag{1}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}}V = (Ax + L)^{\mathrm{T}}(Ax + L) \tag{2}$$

Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \tag{1}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}}V = (Ax + L)^{\mathrm{T}}(Ax + L) \tag{2}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}L + L^{\mathrm{T}}Ax + L^{\mathrm{T}}L \tag{3}$$

Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \tag{1}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}}V = (Ax + L)^{\mathrm{T}}(Ax + L) \tag{2}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}L + L^{\mathrm{T}}Ax + L^{\mathrm{T}}L \tag{3}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + 2x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}L + L^{\mathrm{T}}L \tag{4}$$

Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \tag{1}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}}V = (Ax + L)^{\mathrm{T}}(Ax + L) \tag{2}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}L + L^{\mathrm{T}}Ax + L^{\mathrm{T}}L \tag{3}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + 2x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}L + L^{\mathrm{T}}L \tag{4}$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^{\mathrm{T}}V}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}V + V^{\mathrm{T}}\frac{\partial V}{\partial x}\right) = A^{\mathrm{T}}V = A^{\mathrm{T}}Ax + A^{\mathrm{T}}L = 0 \tag{5}$$

Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \tag{1}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}}V = (Ax + L)^{\mathrm{T}}(Ax + L) \tag{2}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}L + L^{\mathrm{T}}Ax + L^{\mathrm{T}}L \tag{3}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + 2x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}L + L^{\mathrm{T}}L \tag{4}$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^{\mathrm{T}}V}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}V + V^{\mathrm{T}}\frac{\partial V}{\partial x}\right) = A^{\mathrm{T}}V = A^{\mathrm{T}}Ax + A^{\mathrm{T}}L = 0 \tag{5}$$

Rozwiązanie równań normalnych

$$\hat{x} = -(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}L) \tag{6}$$

Równania poprawek w ujęciu macierzowym

$$V = Ax + L \tag{1}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}}V = (Ax + L)^{\mathrm{T}}(Ax + L) \tag{2}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}L + L^{\mathrm{T}}Ax + L^{\mathrm{T}}L \tag{3}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + 2x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}L + L^{\mathrm{T}}L \tag{4}$$

Równania normalne

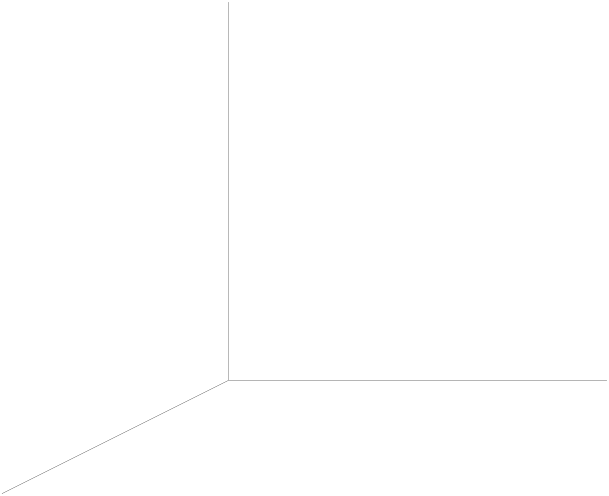
$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^{\mathrm{T}}V}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}V + V^{\mathrm{T}}\frac{\partial V}{\partial x}\right) = A^{\mathrm{T}}V = A^{\mathrm{T}}Ax + A^{\mathrm{T}}L = 0 \tag{5}$$

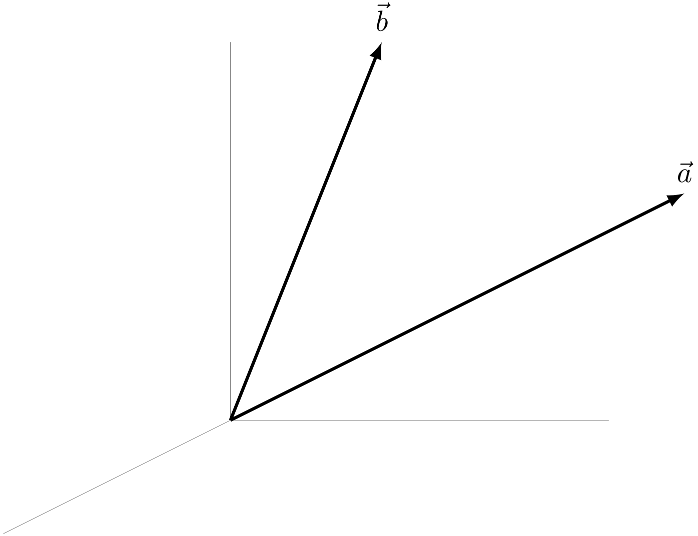
Rozwiązanie równań normalnych

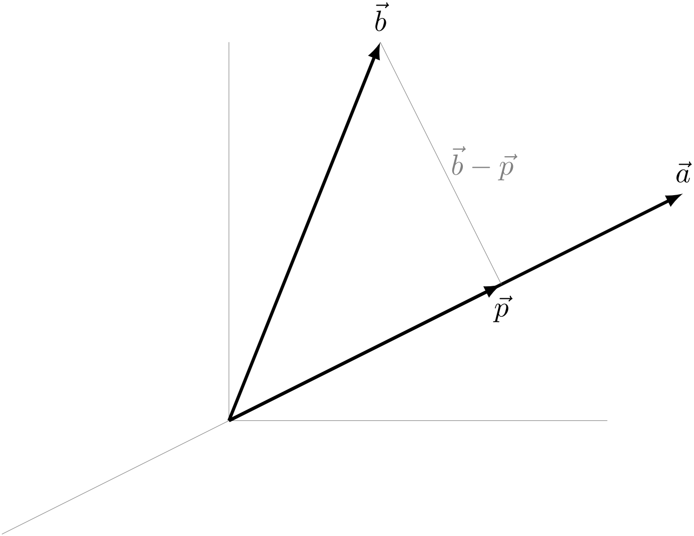
$$\hat{x} = -(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}L) \tag{6}$$

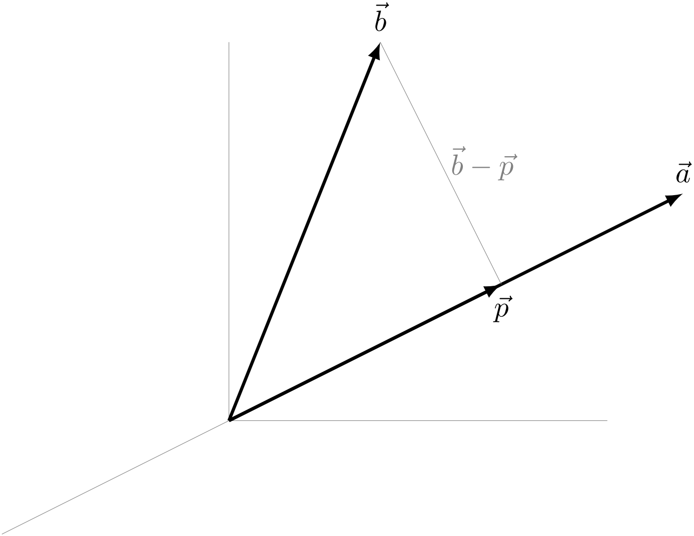
Wyznaczone poprawki

$$\widehat{V} = A\hat{x} + L \tag{7}$$

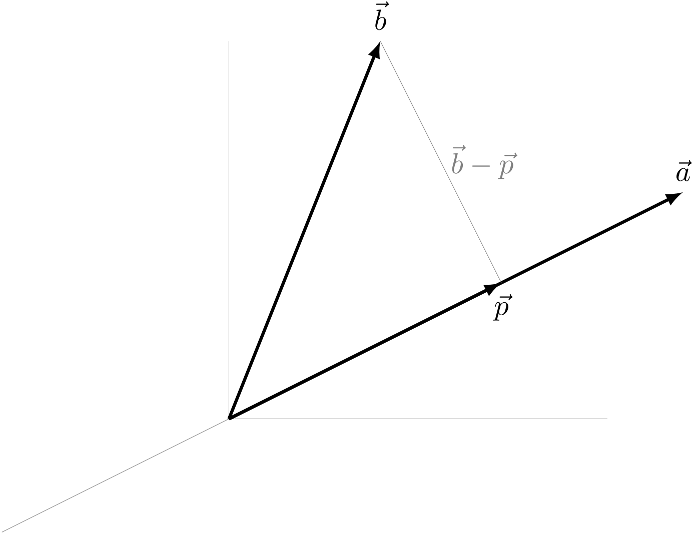



$\vec{b}$
$\vec{a}$


$\vec{b}$
$\vec{b} - \vec{p}$
$\vec{a}$
$\vec{p}$

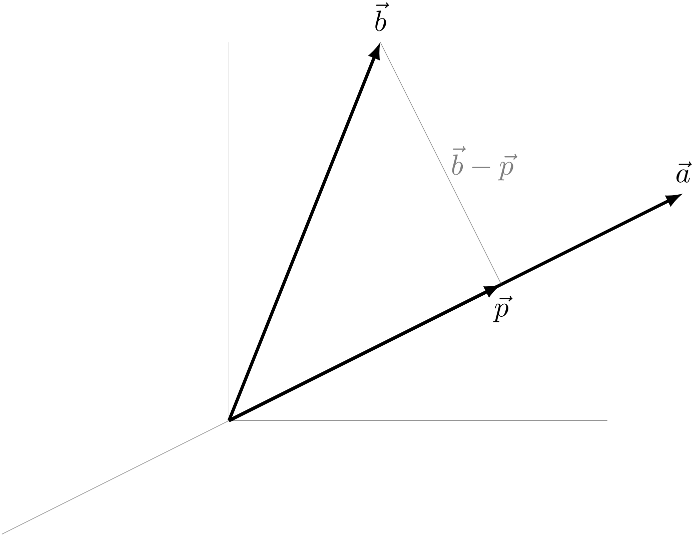



$$\vec{p} = \hat{x}\vec{a} \tag{8}$$




$$\vec{p} = \hat{x}\vec{a} \tag{8}$$

$\vec{a}(\vec{b} - \vec{p})$




$$\vec{p} = \hat{x}\vec{a} \tag{8}$$

$$\vec{a}(\vec{b}-\vec{p}) = 0 = \vec{a}(\vec{b}-\hat{x}\vec{a}) \tag{9}$$

$$\hat{x} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}} = \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a} \tag{10}$$

$$\hat{x} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}} = \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a} \tag{10}$$

Macierz rzutowania ($P$)

$$p = Pb \tag{11}$$

$$\hat{x} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}} = \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a} \tag{10}$$

Macierz rzutowania ($P$)

$$p = Pb \tag{11}$$

$$p = \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a}a \tag{12}$$

$$p = Pb = a \cdot \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a} \tag{13}$$

$$P = \frac{aa^{\mathrm{T}}}{a^{\mathrm{T}}a} \tag{14}$$

Teraz mamy $n$ wektorów (liniowo niezależnych) rozpinających $n$ wymiarową podprzestrzeń, a szukamy kombinacji liniowej $\hat{x}_1 a_1 + \ldots + \hat{x}_n a_n$.

Teraz mamy $n$ wektorów (liniowo niezależnych) rozpinających $n$ wymiarową podprzestrzeń, a szukamy kombinacji liniowej $\hat{x}_1 a_1 + \ldots + \hat{x}_n a_n$.
Musimy znaleźć taką kombinacje $p = A\hat{x}$, która będzie najbliższa $b$.

$$A^{\mathrm{T}}(b - A\hat{x}) = 0 \tag{15}$$

Teraz mamy $n$ wektorów (liniowo niezależnych) rozpinających $n$ wymiarową podprzestrzeń, a szukamy kombinacji liniowej $\hat{x}_1 a_1 + \ldots + \hat{x}_n a_n$.
Musimy znaleźć taką kombinacje $p = A\hat{x}$, która będzie najbliższa $b$.

$$A^{\mathrm{T}}(b - A\hat{x}) = 0 \tag{15}$$

$$A^{\mathrm{T}}A\hat{x} = A^{\mathrm{T}}b \tag{16}$$

$$p = A\hat{x} = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}(A^{\mathrm{T}}b) \tag{17}$$

więc macierz rzutowania

$$p = Pb \tag{18}$$

$$P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

Metoda (?) Najmniejszych Kwadratów, to właściwie kryterium rozwiązania,

Metoda (?) Najmniejszych Kwadratów, to właściwie kryterium rozwiązania,

- w rachunku różniczkowym jest to minimializacja funkcji celu

Metoda (?) Najmniejszych Kwadratów, to właściwie kryterium rozwiązania,

- w rachunku różniczkowym jest to minimializacja funkcji celu
- w algebrze liniowej ortogonalność pomiędzy wektorem poprawek a przestrzenią rozpinaną przez kolumny macierzy $A$

Metoda (?) Najmniejszych Kwadratów, to właściwie kryterium rozwiązania,

- w rachunku różniczkowym jest to minimializacja funkcji celu
- w algebrze liniowej ortogonalność pomiędzy wektorem poprawek a przestrzenią rozpinaną przez kolumny macierzy $A$ ($A^{\mathrm{T}}V = \vec{0}$, $V^{\mathrm{T}}V = \|V\|^2$ )

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{n \times n} \tag{20}$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

$\hat{\sigma}_0$, czasem oznaczane jako $m_0$, błąd średni typowego spostrzeżenia

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 Q \tag{20}$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

$\hat{\sigma}_0$, czasem oznaczane jako $m_0$, błąd średni typowego spostrzeżenia

$Q$, macierz kofaktorów

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 Q \tag{20}$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

$\hat{\sigma}_0$, czasem oznaczane jako $m_0$, błąd średni typowego spostrzeżenia

$Q$, macierz kofaktorów

Macierz wag

$$P \sim Q^{-1} \tag{21}$$

W przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych,

$$C = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 Q \tag{20}$$

(gdy dodatkowo obserwacje nie są niezależne, poza przekątnymi wartości kowariancji)

$\hat{\sigma}_0$, czasem oznaczane jako $m_0$, błąd średni typowego spostrzeżenia

$Q$, macierz kofaktorów

Macierz wag

$$P \sim Q^{-1} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{m_n^2} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$V = Ax + L \tag{22}$$

$$V = Ax + L \tag{22}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}} P V = \min$$

$$V = Ax + L \tag{22}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}} P V = \min \tag{23}$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^{\mathrm{T}} P V}{\partial x} = \frac{1}{2} V^{\mathrm{T}} P A \tag{24}$$

$$V = Ax + L \tag{22}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}} P V = \min \tag{23}$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^{\mathrm{T}} P V}{\partial x} = \frac{1}{2} V^{\mathrm{T}} P A \tag{24}$$

$$A^{\mathrm{T}} P V = 0 \tag{25}$$

$$V = Ax + L \tag{22}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}}PV = \min \tag{23}$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^{\mathrm{T}}PV}{\partial x} = \frac{1}{2}V^{\mathrm{T}}PA \tag{24}$$

$$A^{\mathrm{T}}PV = 0 \tag{25}$$

Rozwiązanie równań normalnych

$$\hat{x} = -(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}}PL) \tag{26}$$

$$V = Ax + L \tag{22}$$

Funkcja celu

$$V^{\mathrm{T}} P V = \min \tag{23}$$

Równania normalne

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^{\mathrm{T}} P V}{\partial x} = \frac{1}{2} V^{\mathrm{T}} P A \tag{24}$$

$$A^{\mathrm{T}} P V = 0 \tag{25}$$

Rozwiązanie równań normalnych

$$\hat{x} = -(A^{\mathrm{T}} P A)^{-1} \cdot (A^{\mathrm{T}} P L) \tag{26}$$

Esymator błędu średniego typowego spostrzeżenia

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^{\mathrm{T}} P V}{n - r} \tag{27}$$