

# Statyczna teoria pływów

ostatnia aktualizacja  
29 kwietnia 2020

*„...If I were asked to tell what I mean by the Tides I should feel it exceedingly difficult to answer the question...”*

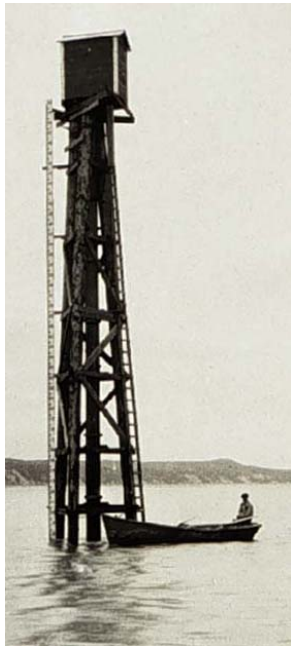
*Lord Kelvin, 1882*

*„...If I were asked to tell what I mean by the Tides I should feel it exceedingly difficult to answer the question...”*

*Lord Kelvin, 1882*

- ~~Wszelkie efekty powodowane przez ciała zewnętrzne~~
- ~~Zjawiska powodowane przez masy ciał zewnętrznych~~
- ~~Deformacje powodowane przez ciała zewnętrzne~~
- Efekty powodowane przez różnicowe grawitacyjne oddziaływanie ciał zewnętrznych

## ODDYCHANIE ZIEMI



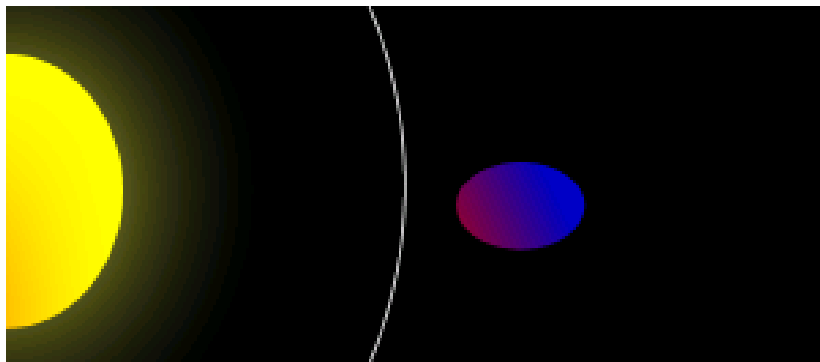
[oceanservice.noaa.gov](https://oceanservice.noaa.gov)



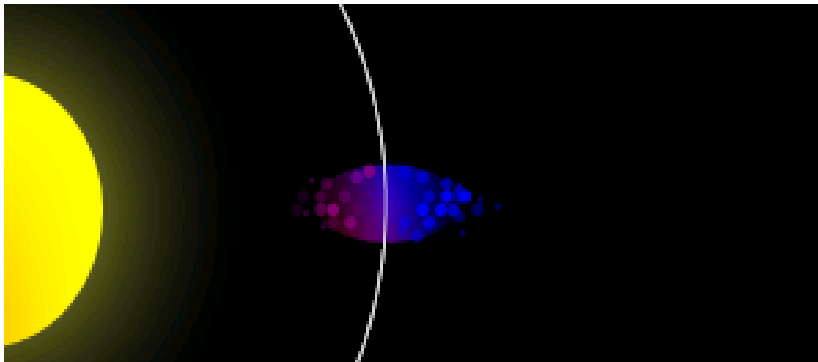
[homepage.oma.be/mvc](http://homepage.oma.be/mvc)



[homepage.oma.be/mvc](http://homepage.oma.be/mvc)

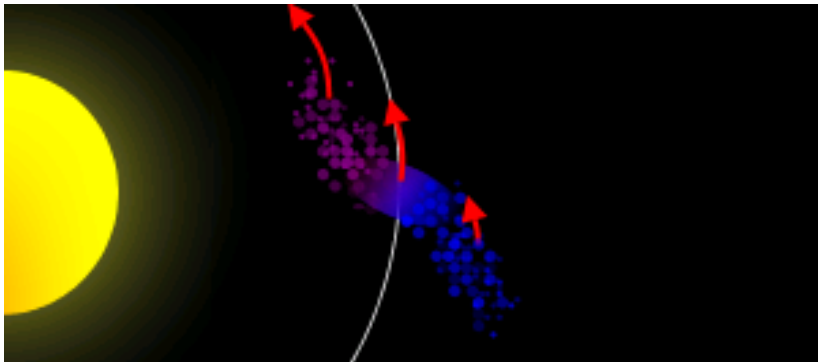


[pl.wikipedia.org](http://pl.wikipedia.org)

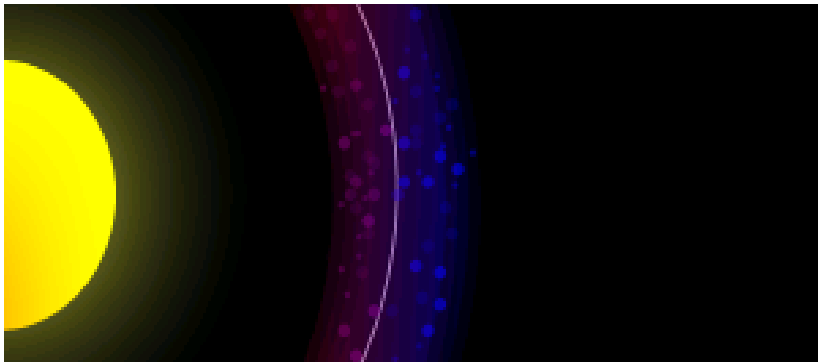


[pl.wikipedia.org](http://pl.wikipedia.org)

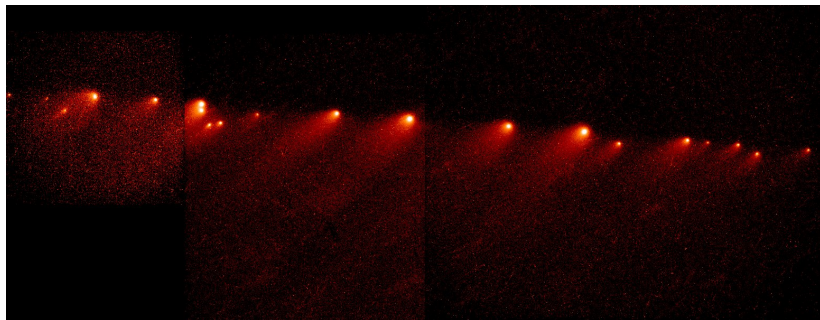




[pl.wikipedia.org](http://pl.wikipedia.org)



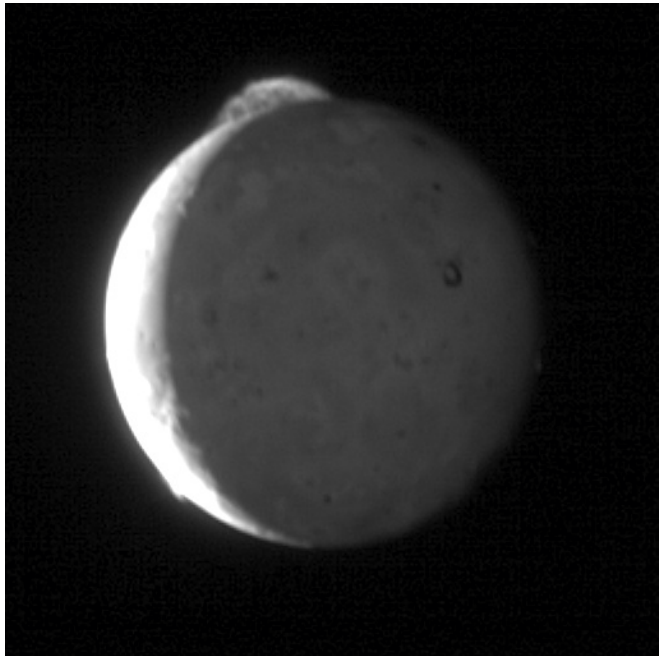
[pl.wikipedia.org](http://pl.wikipedia.org)



[pl.wikipedia.org](http://pl.wikipedia.org)



[pl.wikipedia.org](http://pl.wikipedia.org)



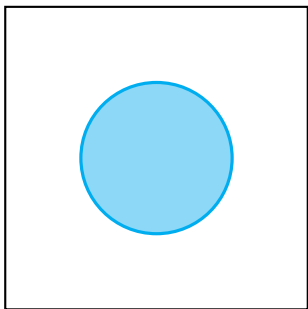
[pl.wikipedia.org](http://pl.wikipedia.org)



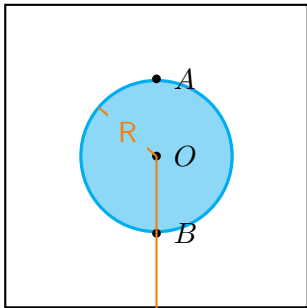
[homepage.oma.be/mvc](http://homepage.oma.be/mvc)

Mniej spektakularne, również ciekawe i ważne:

- pływy skorupy ziemskiej
  - zmiany wysokości
  - zmiany siły ciężkości
  - zmiany kierunku linii pionu
  - zmiany długości, powierzchni, objętości
- pływy atmosfery
- pływowe zmiany prędkości obrotowej Ziemi
- pływowe zmiany orientacji Ziemi
- perturbacje SSZ
- „ciemna strona księżyca” i jego ucieczka
- efekty pośrednie pływów oceanicznych i atmosferycznych
- trzęsienia Ziemi
- . . .



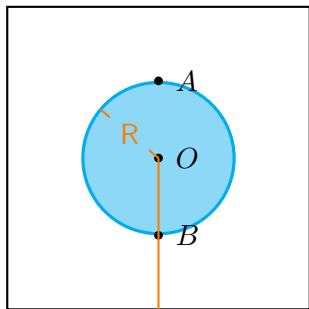




$r$

$M$

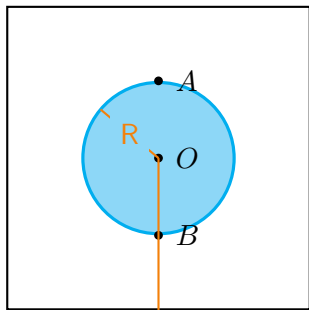




$$\gamma_O = \frac{GM}{r^2}$$

$$\gamma_A = \frac{GM}{(r + R)^2}$$

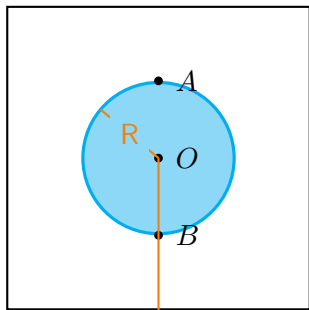
$$\gamma_B = \frac{GM}{(r - R)^2}$$



$$\gamma_O = \frac{GM}{r^2}$$

$$\gamma_A \simeq \gamma_O - \gamma_O \cdot \frac{2R}{r}$$

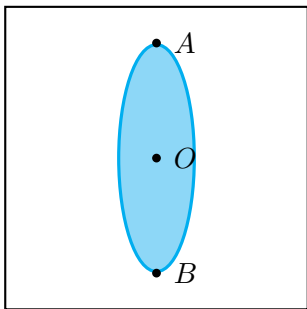
$$\gamma_B \simeq \gamma_O + \gamma_O \cdot \frac{2R}{r}$$



$$\gamma_O = \frac{GM}{r^2}$$

$$\gamma_A \simeq \gamma_O - \gamma_O \cdot \frac{2R}{r} \sim \frac{M \cdot R}{r^3}$$

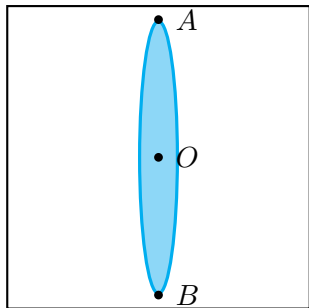
$$\gamma_B \simeq \gamma_O + \gamma_O \cdot \frac{2R}{r}$$



$$\gamma_O = \frac{GM}{r^2}$$

$$\gamma_A \simeq \gamma_O - \gamma_O \cdot \frac{2R}{r}$$

$$\gamma_B \simeq \gamma_O + \gamma_O \cdot \frac{2R}{r}$$



$$\gamma_O = \frac{GM}{r^2}$$

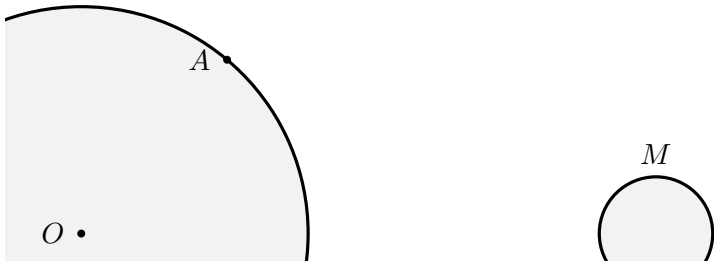
$$\gamma_A \simeq \gamma_O - \gamma_O \cdot \frac{2R}{r}$$

$$\gamma_B \simeq \gamma_O + \gamma_O \cdot \frac{2R}{r}$$

## Przykład

Wyprowadzić wzór na przyspieszenie siły ciężkości (składowa pionowa i horyzontalna) na powierzchni kuli w zależności od geocentrycznej i topocentrycznej odległości zenitalnej.

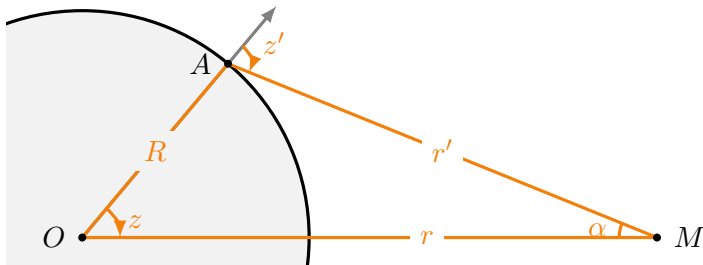
Ziemia jest kulą o promieniu  $R$ , a ciało zewnętrzne w odległości  $r$  ma masę  $M$  oraz promień  $R'$



## Przykład

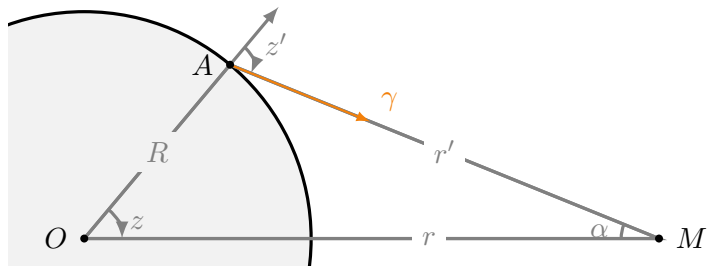
Wyprowadzić wzór na przyspieszenie siły ciężkości (składowa pionowa i horyzontalna) na powierzchni kuli w zależności od geocentrycznej i topocentrycznej odległości zenitalnej.

Ziemia jest kulą o promieniu  $R$ , a ciało zewnętrzne w odległości  $r$  ma masę  $M$  oraz promień  $R'$

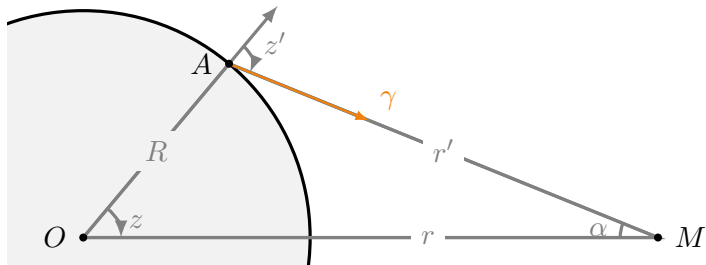




$$\gamma = \frac{GM}{r'^2}$$

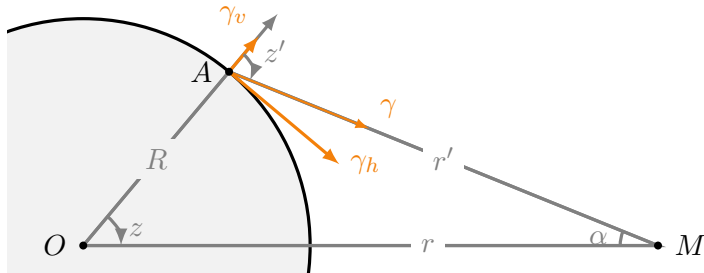


$$\gamma = \frac{GM}{r^2} \cdot \left( 1 + 2 \frac{R}{r} \cos z \right)$$



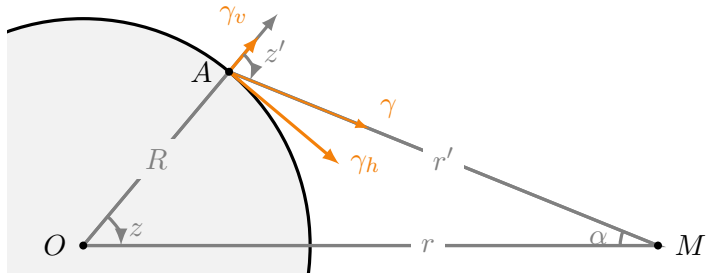
$$\gamma_v = \frac{GM}{r^2} \cdot \left(1 + 2\frac{R}{r} \cos z\right) \cdot \cos(\alpha + z)$$

$$\gamma_h = \frac{GM}{r^2} \cdot \left(1 + 2\frac{R}{r} \cos z\right) \cdot \sin(\alpha + z)$$



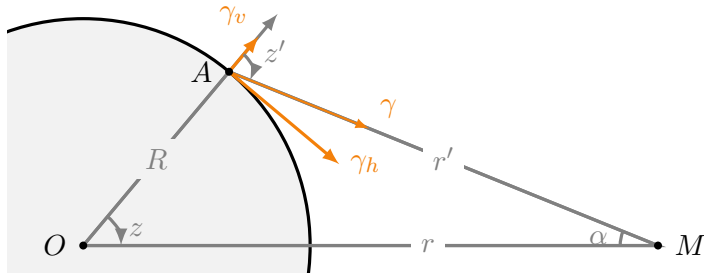
$$\sin \alpha \simeq \frac{R \sin z}{r}$$

$$\cos \alpha \simeq 1$$



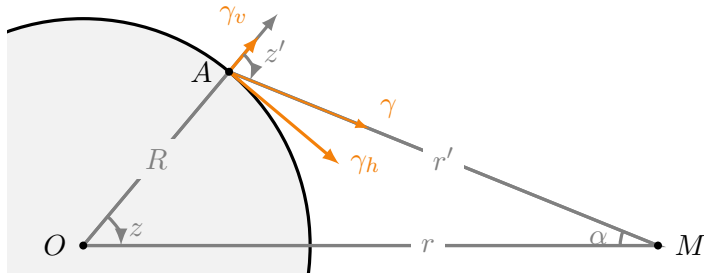
$$\gamma_v = \frac{GM}{r^2} \cdot \left( \cos z + \frac{R}{r}(3 \cos^2 z - 1) \right)$$

$$\gamma_h = \frac{GM}{r^2} \cdot \left( \sin z + \frac{R}{r} \left( \frac{3}{2} \sin 2z \right) \right)$$



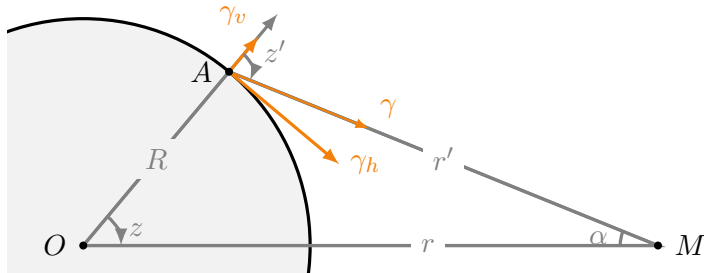
$$\gamma_v = \frac{GM}{r^2} \cdot \left( \cos z + \frac{R}{r} (3 \cos^2 z - 1) \right)$$

$$\gamma_h = \frac{GM}{r^2} \cdot \left( \sin z + \frac{R}{r} \left( \frac{3}{2} \sin 2z \right) \right)$$

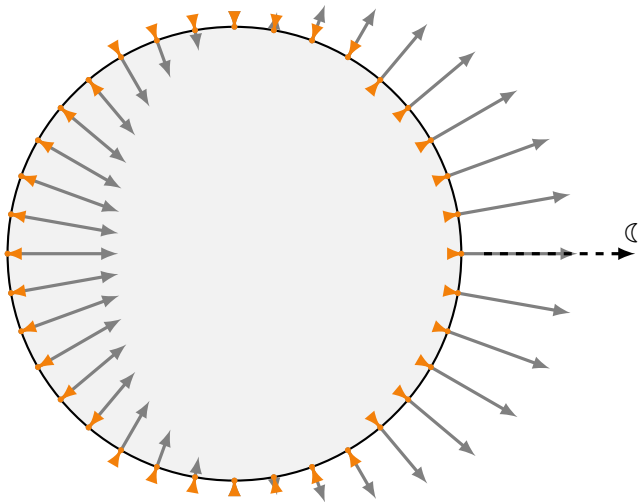


$$\gamma_v = \frac{GM}{r^2} \cdot \left( \cos z + \frac{R}{r} (3 \cos^2 z - 1) \right)$$

$$\gamma_h = \frac{GM}{r^2} \cdot \left( \sin z + \frac{R}{r} \left( \frac{3}{2} \sin 2z \right) \right)$$

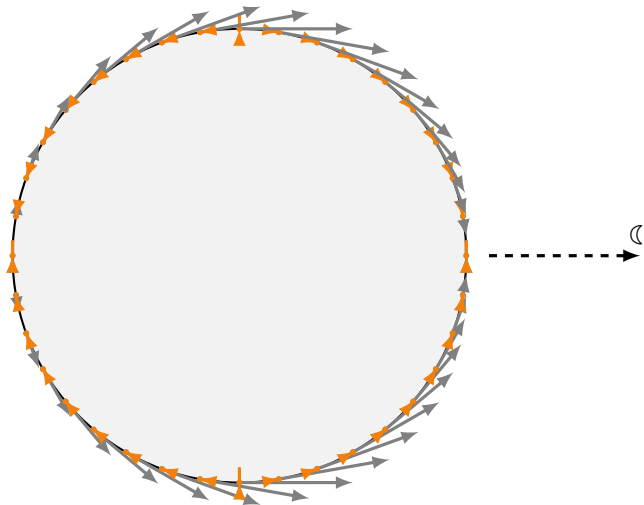


# Składowa pionowa — $\gamma_v$

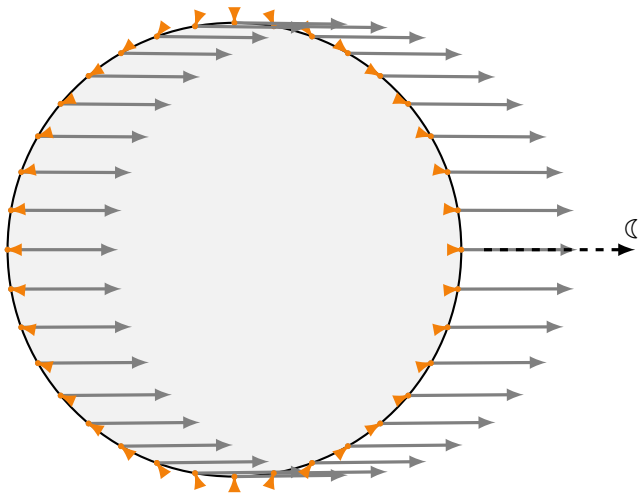




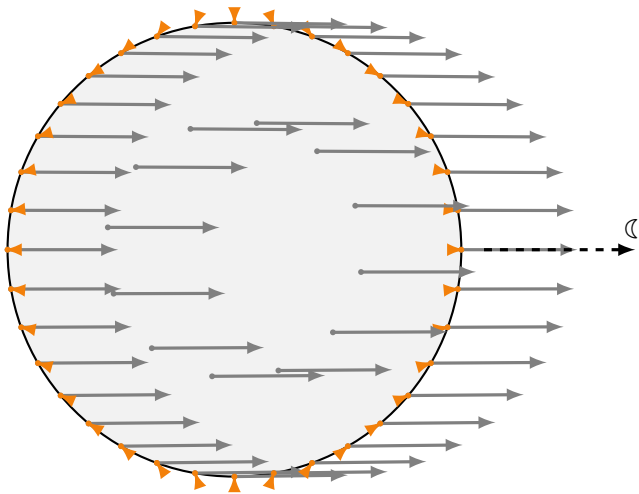
Składowa pozioma —  $\gamma_h$



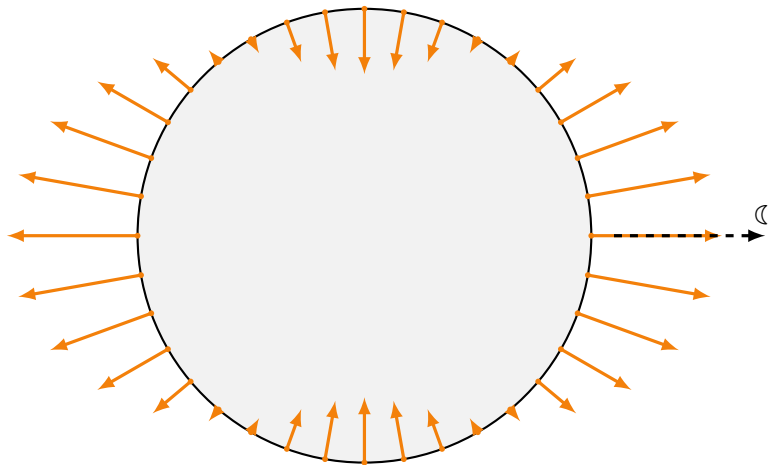
# Siła wypadkowa — $\gamma$



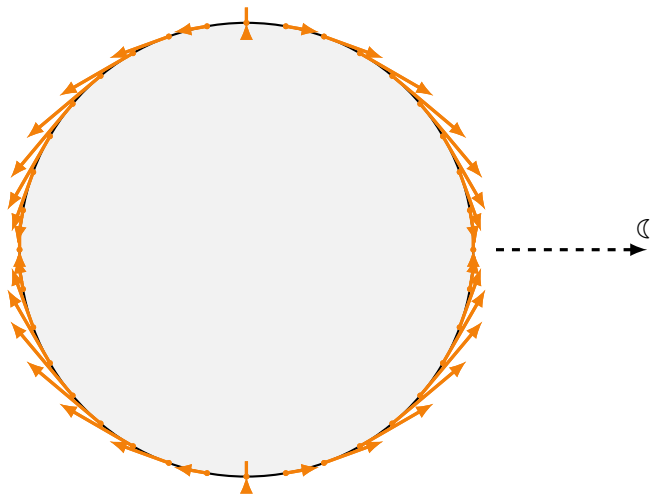
## Siła wypadkowa — $\gamma$



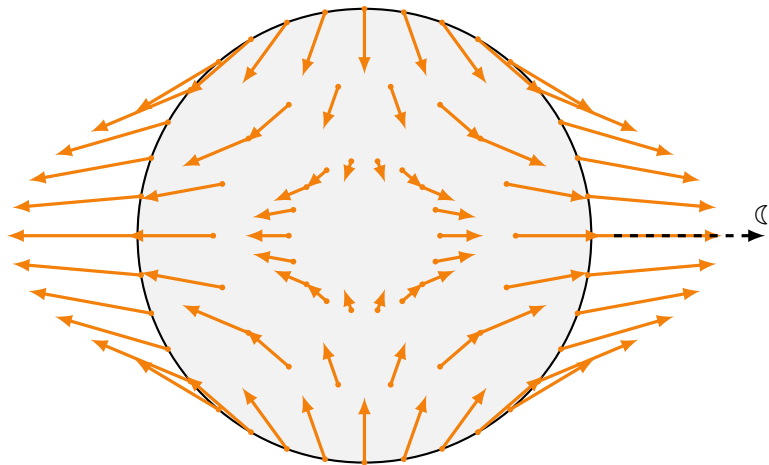
# Składowa pionowa — $\gamma_v$



Składowa pozioma —  $\gamma_h$



Siła wypadkowa —  $\gamma$



## Potencjał grawitacyjny

$$V_A = \frac{Gm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos z)$$

$$V_{A0} = \frac{Gm}{r}$$

$$V_{A1} = \frac{Gm}{r} \frac{R}{r} \cdot \cos z$$

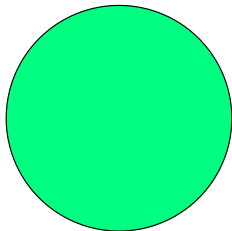
$$V_{A2} = \frac{Gm}{r} \frac{R^2}{r^2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cos^2 z - \frac{1}{2}\right)$$

$$V_{A3} = \frac{Gm}{r} \frac{R^3}{r^3} \cdot \left(\frac{5}{2} \cos^3 z - \frac{3}{2} \cos z\right)$$

## Potencjał pływowy

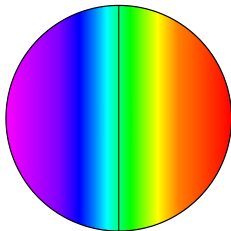
$$V_{pA} = \frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos z)$$

$n = 0$



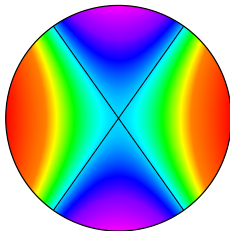
$$\begin{aligned} \llcorner & 4 \cdot 10^3 \\ \odot & 3 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

$n = 1$



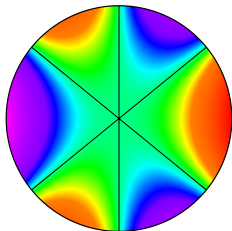
$$\begin{aligned} \llcorner & 6 \cdot 10^1 \\ \odot & 1 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

$n = 2$



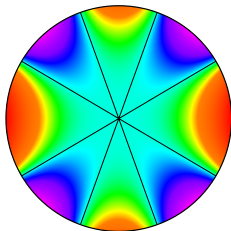
$$\begin{aligned} \llcorner & 1 \\ \odot & 5 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

$n = 3$



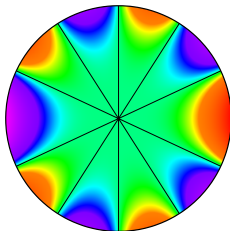
$$\begin{aligned} \llcorner & 2 \cdot 10^{-2} \\ \odot & 2 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$n = 4$



$$\begin{aligned} \llcorner & 3 \cdot 10^{-4} \\ \odot & 8 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

$n = 5$



$$\begin{aligned} \llcorner & 5 \cdot 10^{-6} \\ \odot & 4 \cdot 10^{-14} \end{aligned}$$



$$Vp = V_{\mathcal{C}} + V_{\odot} + v_{\text{♀}} + v_{\text{♂}} + v_{\text{♀}} + v_{\text{♂}} + \dots$$

$\mathcal{C}$	1
$\odot$	0,46
$\text{♀}$	0,00005
$\text{♂}$	0,000006
$\text{♂}$	0,000001

- Zmiana przyspieszenia
- Składowa pozioma
- Pływowe odchylenie pionu
- Zmiana wysokości (pow. ekwipotencjalnej)

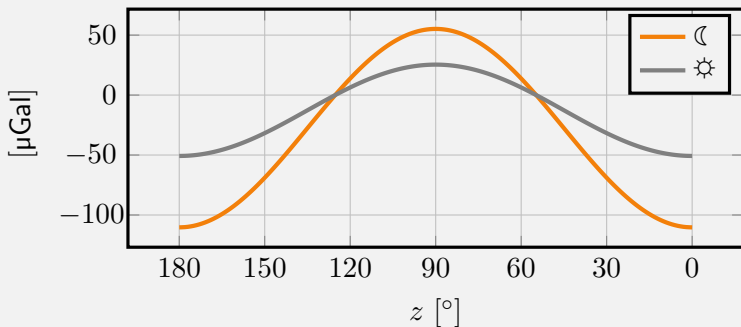
■ Zmiana przyspieszenia

$$\delta g = -\frac{\partial V_p}{\partial R} = -\frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nR^{n-1}}{r^n} P_n(\cos z)$$

■ Składowa pozioma

■ Pływowe odchylenie pionu

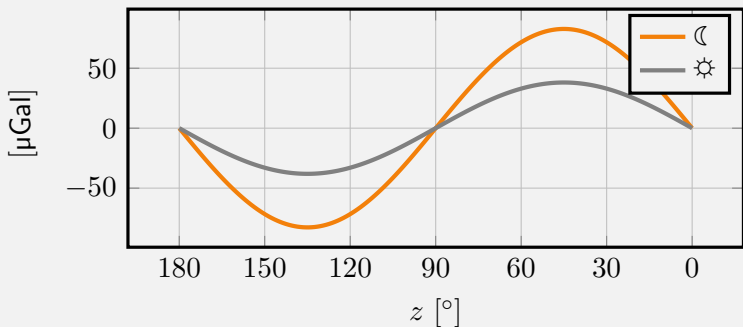
■ Zmiana wysokości (pow. ekwipotencjalnej)



- Zmiana przyspieszenia
- Składowa pozioma

$$\delta h = \frac{\partial V_p}{R \partial z} = \frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^{n-1}}{r^n} \frac{\partial P_n(\cos z)}{\partial z}$$

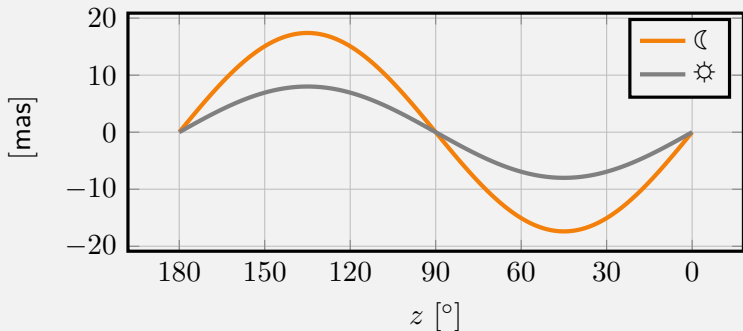
- Pływowe odchylenie pionu
- Zmiana wysokości (pow. ekwipotencjalnej)



- Zmiana przyspieszenia
- Składowa pozioma
- Pływowe odchylenie pionu

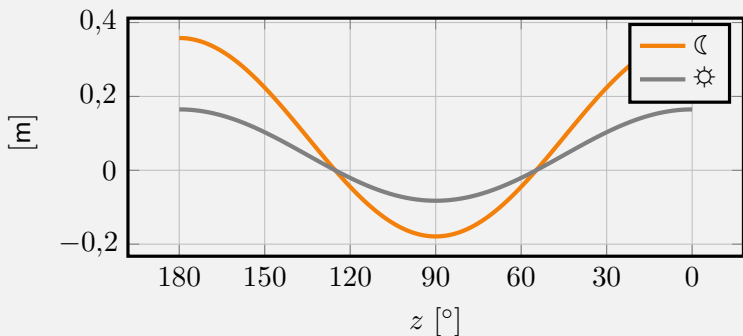
$$\delta\vartheta = \frac{\delta h}{g}$$

- Zmiana wysokości (pow. ekwipotencjalnej)



- Zmiana przyspieszenia
- Składowa pozioma
- Pływowe odchylenie pionu
- Zmiana wysokości (pow. ekwipotencjalnej)

$$\delta\zeta = \frac{V_2}{g}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{GmR^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 z - \frac{1}{2} \right) \\ \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(t) \end{array} \right.$$

$$V_2 = \frac{3}{4} \frac{GmR^2}{r^3} \cdot \left[ \begin{array}{l} 3(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3})(\sin^2 \delta - \frac{1}{3}) \\ + \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos t \\ + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2t \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{GmR^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 z - \frac{1}{2} \right) \\ \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(t) \end{array} \right.$$

$$V_2 = \frac{3}{4} \frac{GmR^2}{r^3} \cdot \left[ \boxed{3(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3})(\sin^2 \delta - \frac{1}{3})} \text{ wyraz strefowy} \right. \\ \left. + \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos t \right. \\ \left. + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2t \right. \left. \right]$$

pływy długookresowe



$$\begin{cases} V_2 = \frac{GmR^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 z - \frac{1}{2} \right) \\ \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(t) \end{cases}$$

$$V_2 = \frac{3}{4} \frac{GmR^2}{r^3} \cdot \left[ 3 \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \right.$$

$$\left. + \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos t \right] \text{ wyraz tesseralny } \\ \text{pływy dobowe}$$

$$+ \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2t \quad ]$$

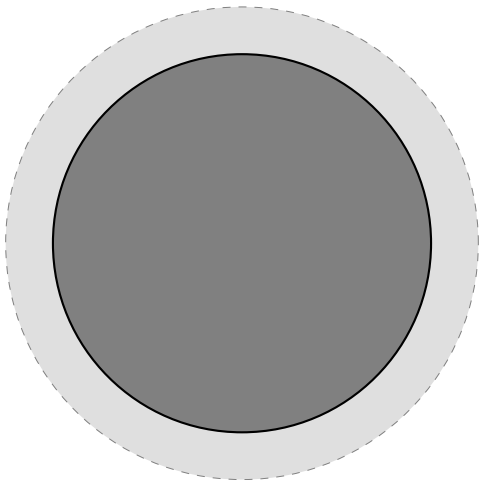
$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{GmR^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 z - \frac{1}{2} \right) \\ \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(t) \end{array} \right.$$

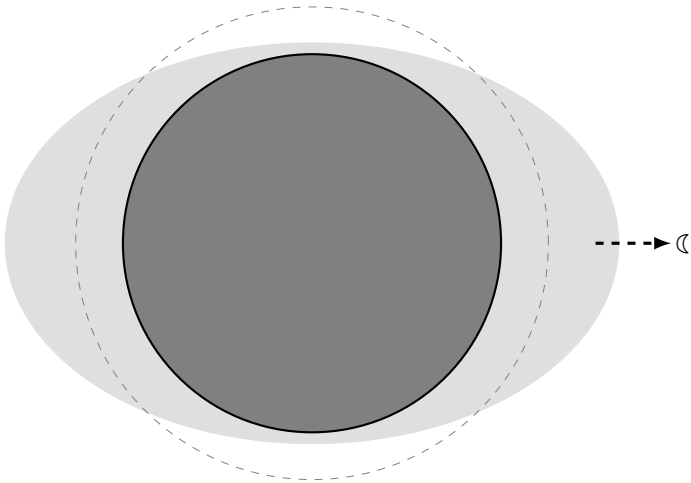
$$V_2 = \frac{3}{4} \frac{GmR^2}{r^3} \cdot \left[ 3 \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \right.$$

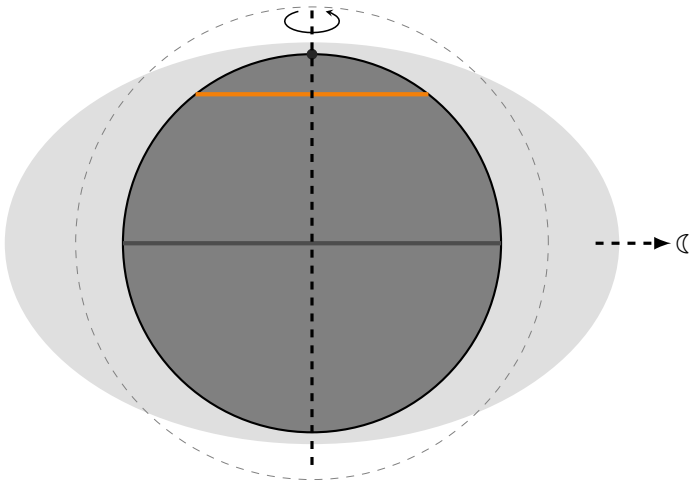
$$+ \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos t$$

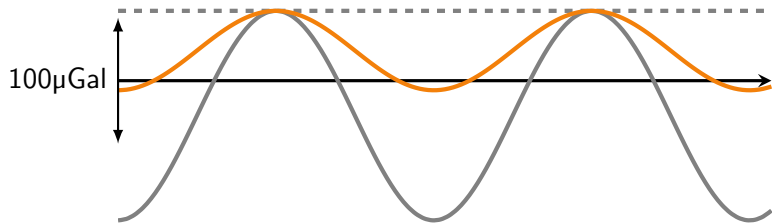
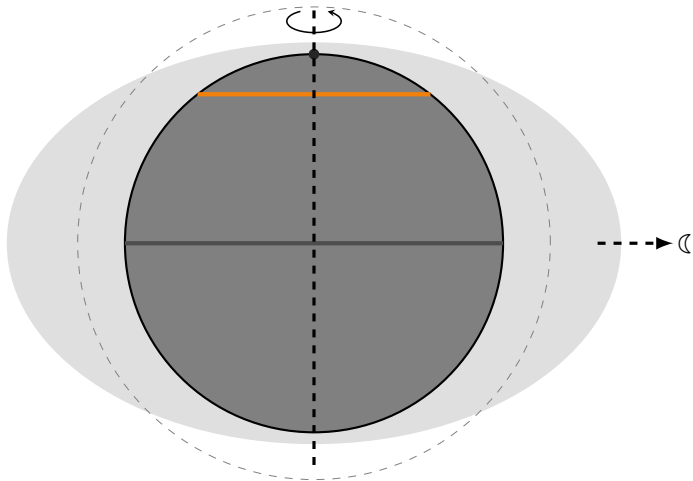
$$\left. + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2t \right]$$

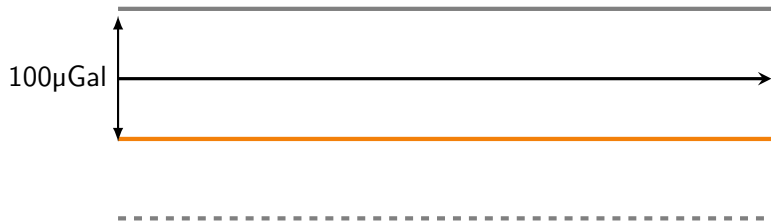
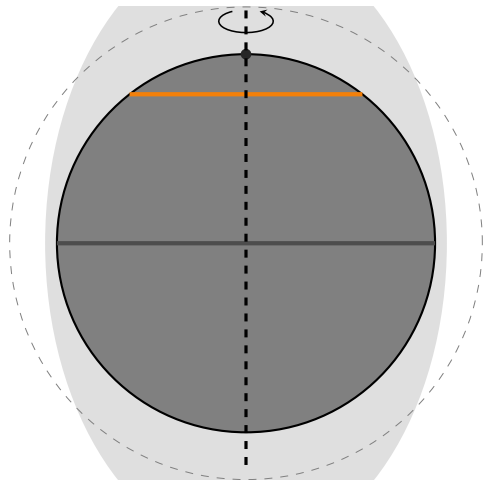
wyraz sektorowy  
pływy pół-dobowe ]

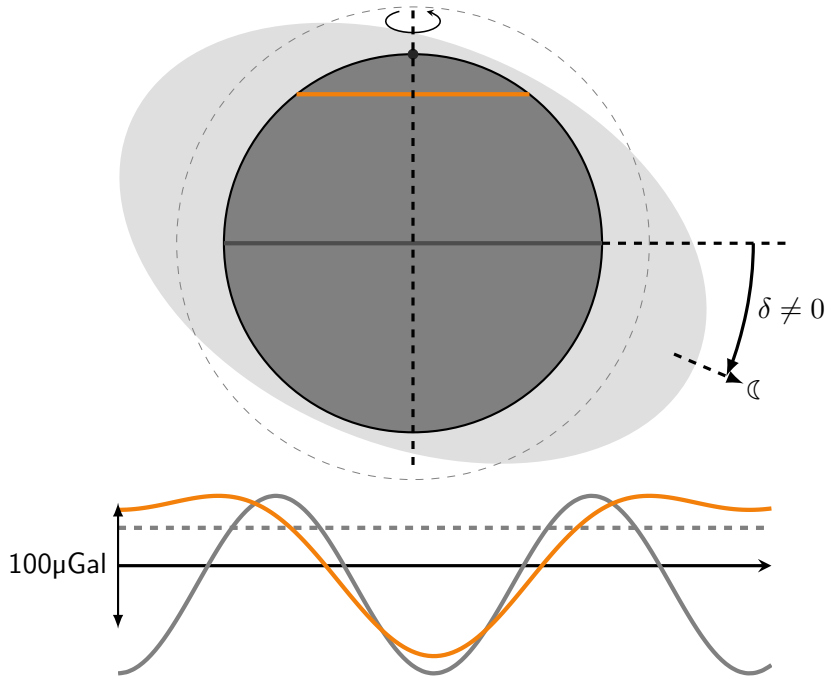




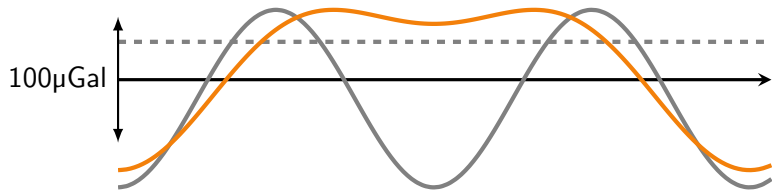
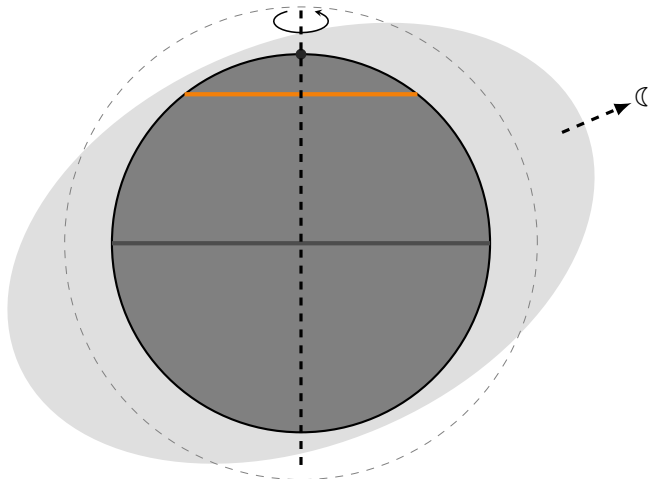


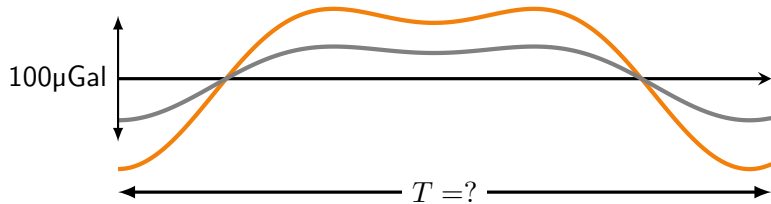
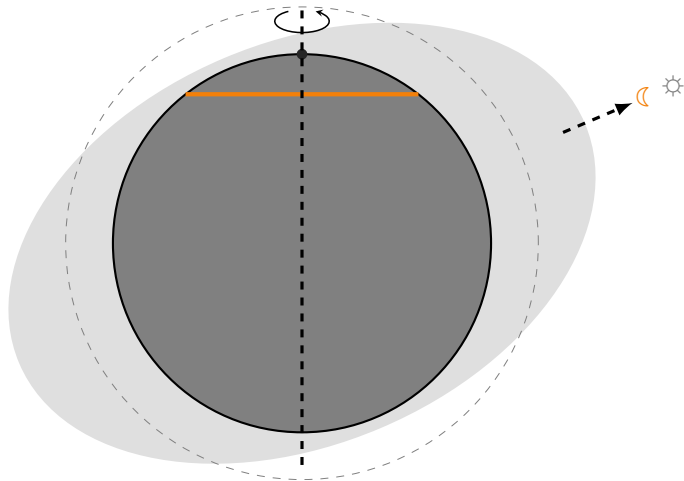


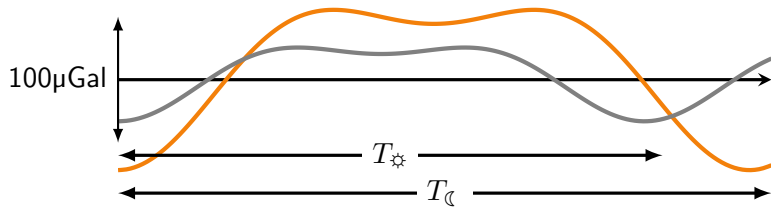
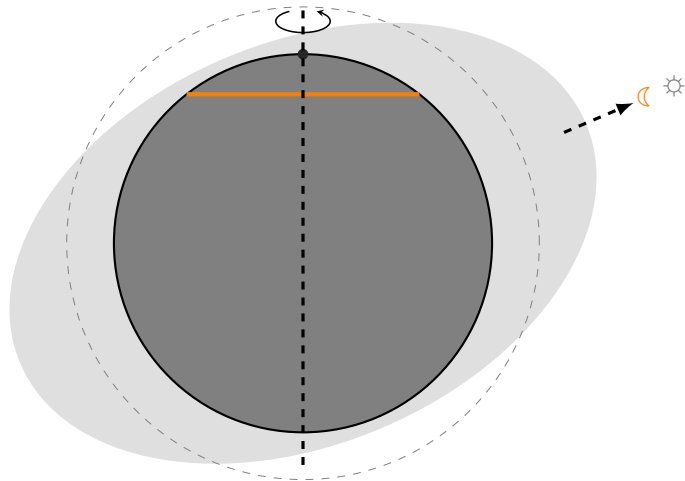


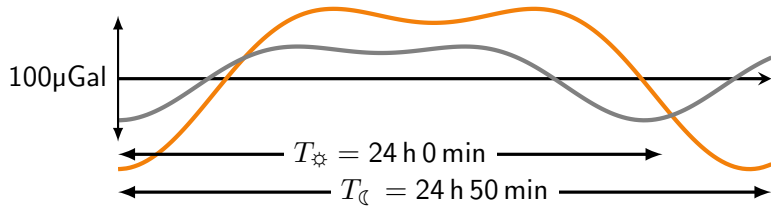
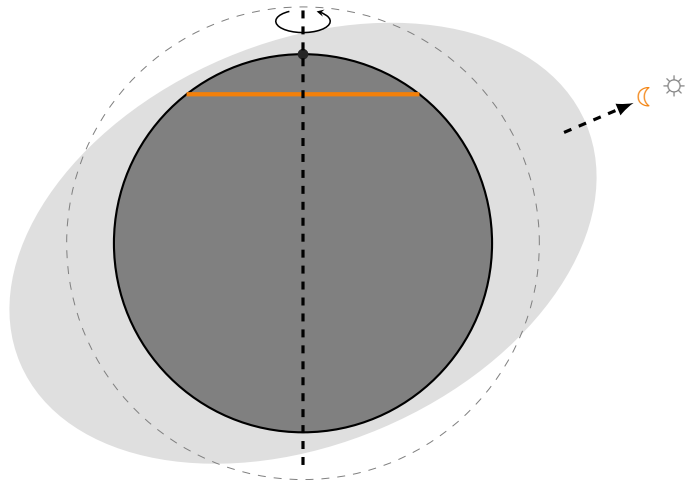












$$V = \frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n f(\varphi, \delta, t)$$

$$= \sum A(K_{1-6}, R, \varphi) \sin \left\{ (a_1 \dot{\tau} + a_2 \dot{s} + a_3 \dot{h} + a_4 \dot{p} + a_5 \dot{N}' + a_6 \dot{p}_s) t \right\}$$

## Laplace

$$V = \frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n f(\varphi, \delta, t)$$

## Doodson

$$= \sum A(K_{1-6}, R, \varphi) \sin \left\{ (a_1 \dot{\tau} + a_2 \dot{s} + a_3 \dot{h} + a_4 \dot{p} + a_5 \dot{N}' + a_6 \dot{p}_s) t \right\}$$

$\dot{\tau}$	24,833	h	średni czas księżycowy
$\dot{s}$	27,3	d	średnia długość Księżyca
$\dot{h}$	365,25	d	średnia długość Słońca
$\dot{p}$	8,8	lat	średnia długość perigeum orbity Księżyca
$-\dot{N}'$	18,6	lat	średnia długość węzła wstępującego orbity Księżyca
$\dot{p}_s$	20 942	lat	średnia długość perigeum orbity Słońca

## Wykaz 1: fragment katalog potencjału pływowego

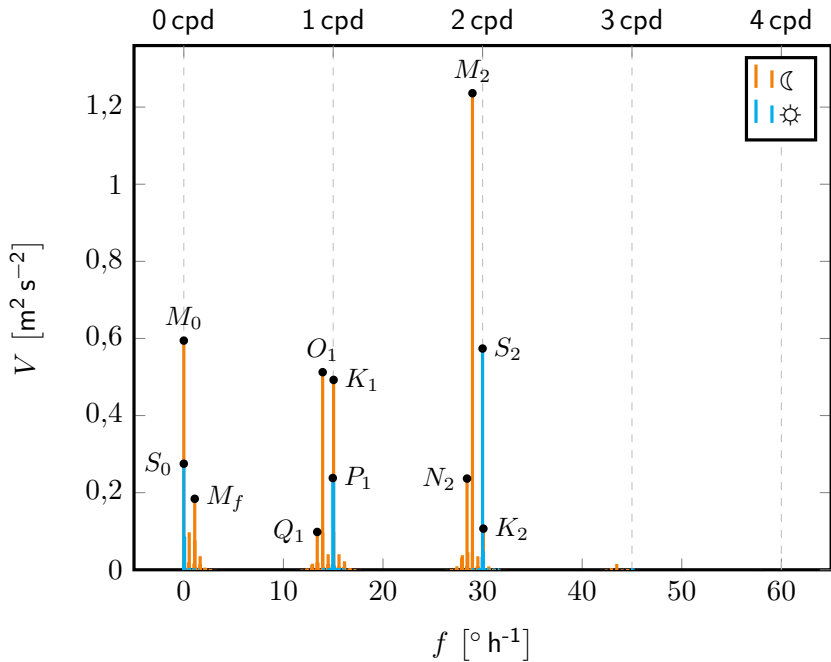
2	0	0	0	0	0	0	0.00000000	-8695028819.	0.	MOSO
4	0	0	0	0	0	0	0.00000000	395037.	0.	
2	0	0	0	0	1	0	0.00220641	771912590.	0.	
4	0	0	0	0	1	0	0.00220641	-307251.	0.	
3	0	0	0	1	-1	0	0.00243541	0.	267094.	
2	0	0	0	0	2	0	0.00441281	-7537749.	0.	
3	0	0	0	1	0	0	0.00464181	0.	-5631229.	
3	0	0	0	1	1	0	0.00684822	0.	-868055.	
2	0	0	0	2	1	0	0.01149003	1177773.	0.	
2	0	0	1	0	-1	-1	0.03886027	-1177773.	0.	
2	0	0	1	0	0	-1	0.04106668	-136150588.	0.	SA
2	0	0	1	0	0	1	0.04107060	7066640.	0.	
2	0	0	1	0	1	-1	0.04327309	1177773.	0.	
2	0	0	2	-2	-1	0	0.07064725	588887.	0.	
2	0	0	2	-2	0	0	0.07285365	-8597745.	0.	
2	0	0	2	-2	1	0	0.07506006	706664.	0.	
3	0	0	2	-1	0	0	0.07749547	0.	-1068375.	
2	0	0	2	0	0	-2	0.08213336	-3179988.	0.	
2	0	0	2	0	0	0	0.08213728	-856594487.	0.	SSA
2	0	0	2	0	1	0	0.08434369	21435473.	0.	
2	0	0	2	0	2	0	0.08655009	47111093.	0.	
2	0	0	3	0	0	-1	0.12320396	-49937586.	0.	STA
2	0	0	3	0	1	-1	0.12541037	942219.	0.	
2	0	0	4	0	0	-2	0.16427064	-2002215.	0.	
2	0	1	0	-1	1	0	0.54658111	63128646.	0.	
3	0	1	0	0	-1	0	0.54681011	0.	5364135.	
2	0	3	-1	-1	0	1	1.60134107	-3651097.	0.	
3	2	4	0	-1	0	0	31.17552851	0.	1148504.	

Symbol	Okres	Pochodzenie
Pływy długookresowe		
$M_0$		Stały pływ księżycowy
$S_0$		Stały pływ słoneczny
$S_a$	$365.25^d$	Pływ eliptyczny $S_0$
$S_{sa}$	$182.62^d$	Pływ deklinacyjny $S_0$
$M_m$	$27.55^d$	Pływ eliptyczny $M_0$
$M_f$	$13.66^d$	Pływ deklinacyjny $M_0$
Pływy dobowe		
$O_1$	$25^h49^m$	Główna fala księżycowa
$P_1$	$24^h04^m$	Główna fala słoneczna
$K_1$	$23^h56^m$	Fala deklinacyjna k-s
Pływy pół-dobowe		
$N_2$	$12^h39^m$	Pływ eliptyczny $M_2$
$M_2$	$12^h25^m$	Główna fala księżycowa
$S_2$	$12^h00^m$	Główna fala słoneczna
Pływy ter-dobowe		
$M_3$	$8^h17^m$	Główna fala księżycowa

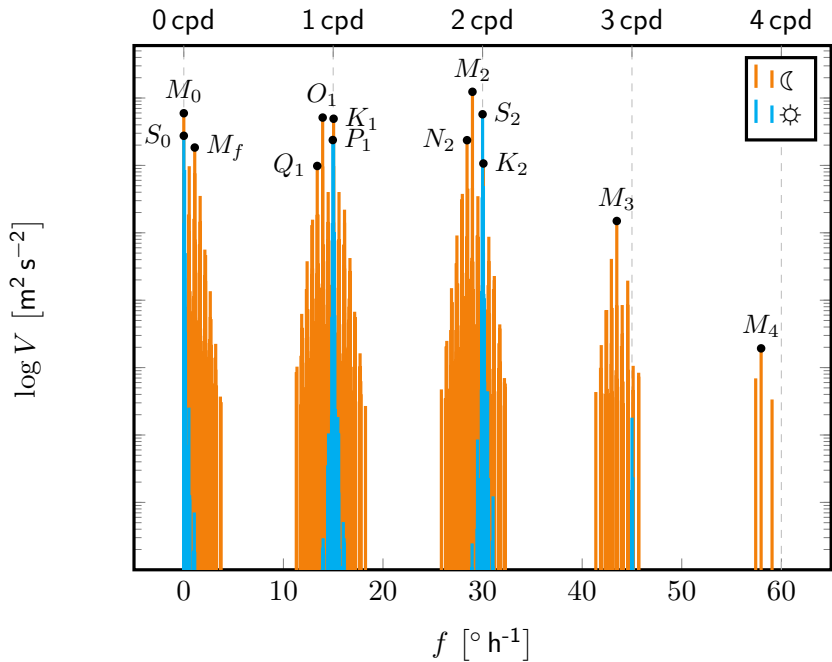
... i wiele, wiele innych...



# Fale pływowe

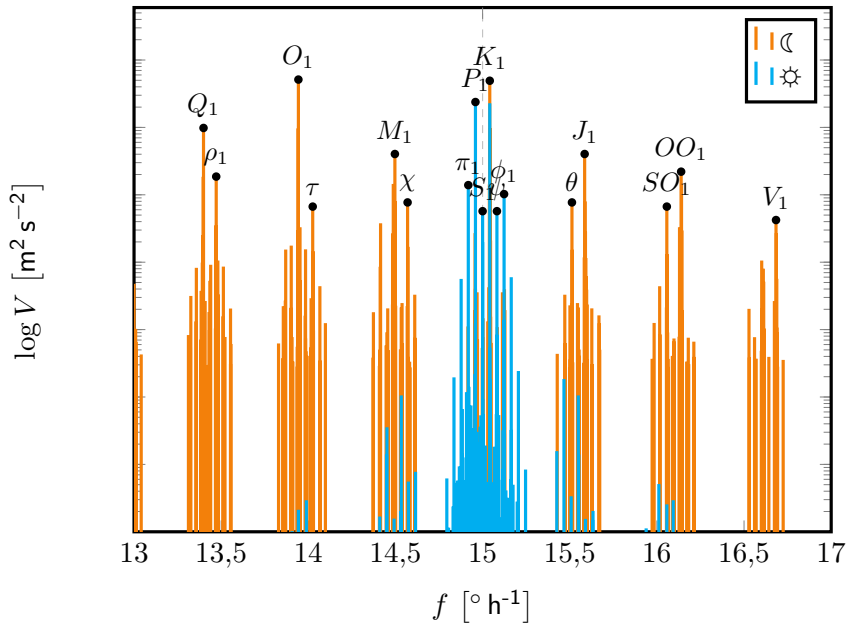


# Fale pływowe



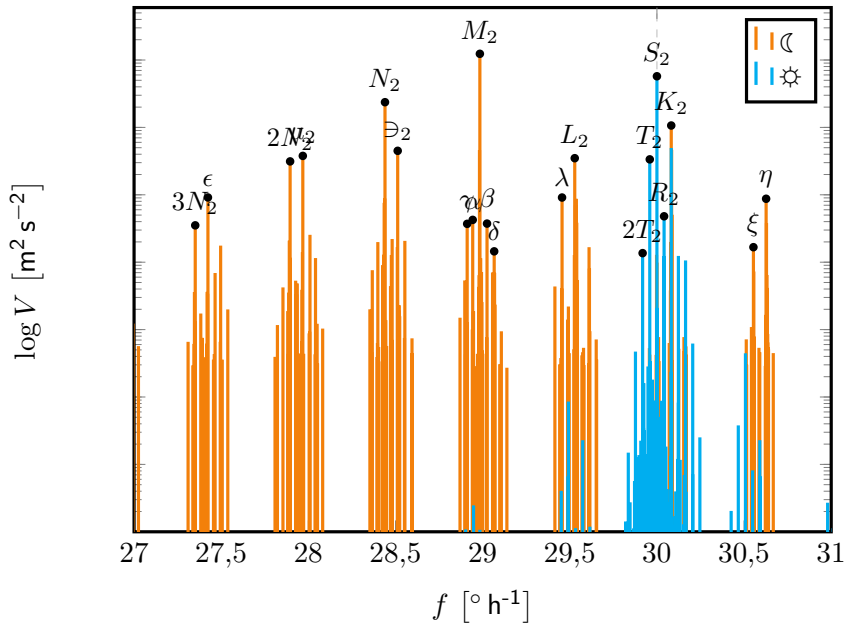
# Fale pływowe

1 cpd

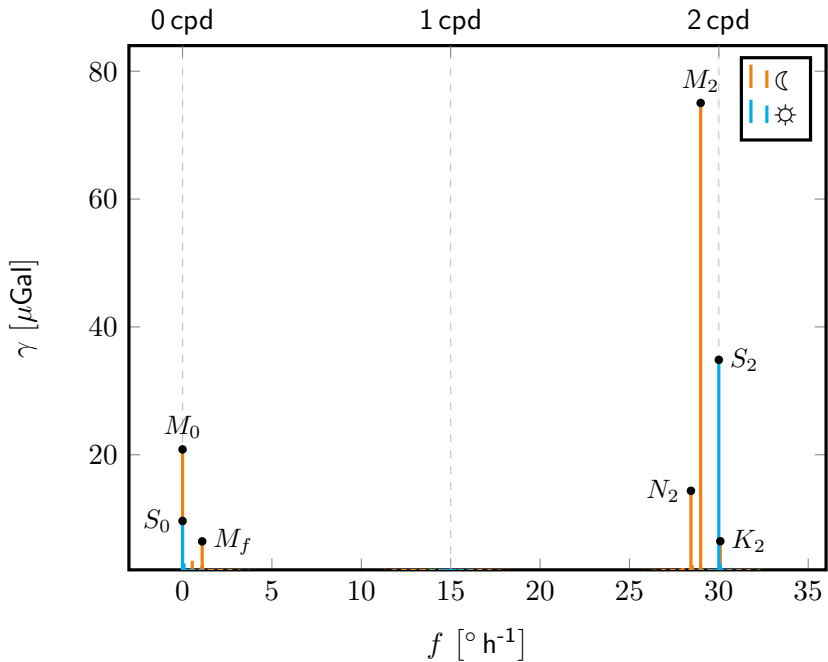


# Fale pływowe

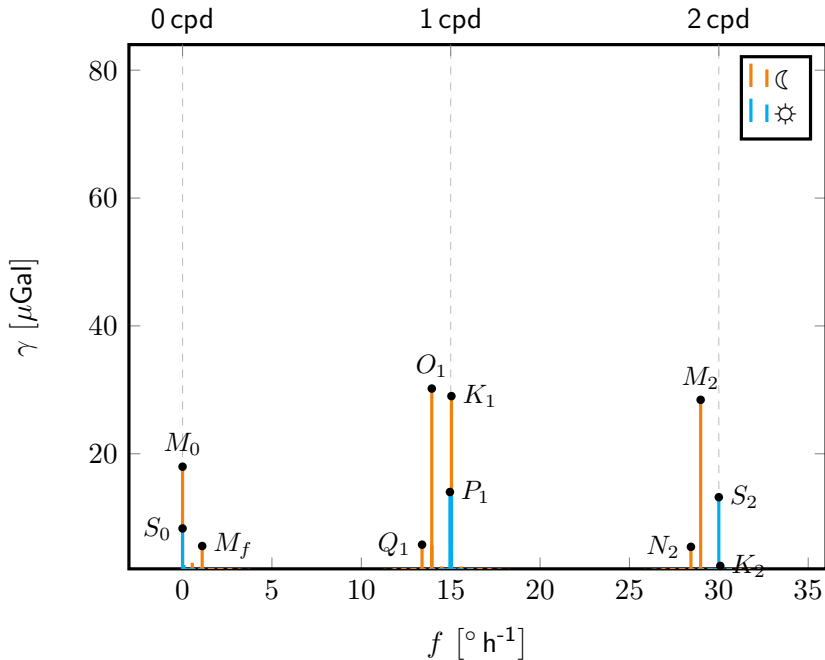
2 cpd



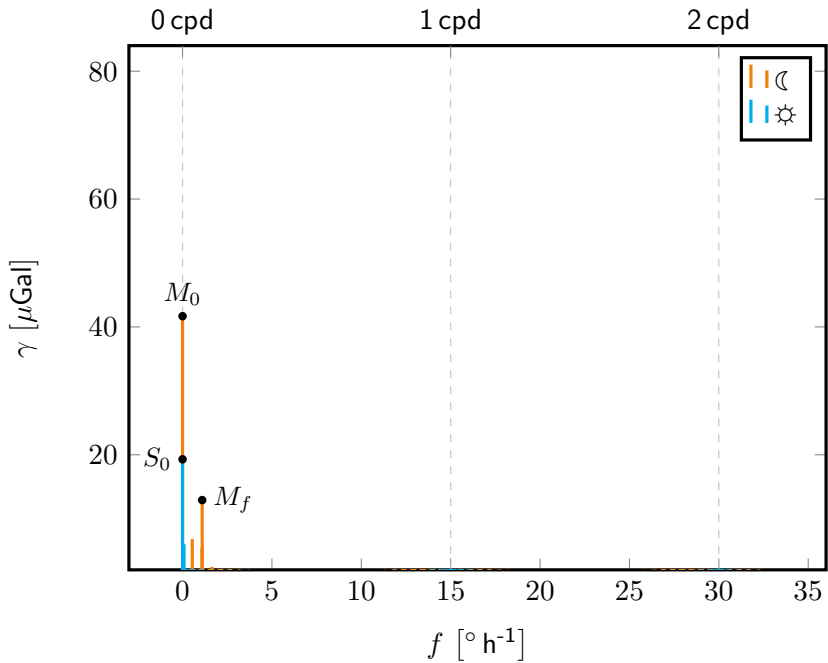
Fale pływowe –  $\varphi = 0^\circ$



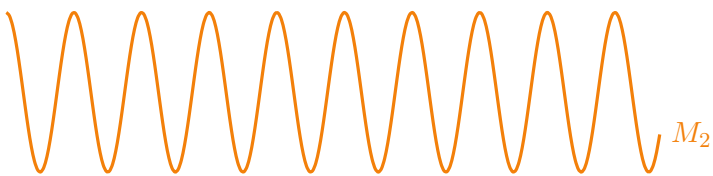
# Fale pływowe – $\varphi = 52^\circ$



Fale pływowe –  $\varphi = 90^\circ$



—————  $M_2$



————— 5 d —————



—————  $S_2$

