**Sylabus przedmiotu „Algebra liniowa w geodezji”**
I semestr studiów inżynierskich dziennych

*Prowadzący przedmiot:* prof. dr hab. Aleksander Brzeziński

*Kod przedmiotu*: GK.SIK123, wymiar: wykład 15h, ćwiczenia audytoryjne: 30h

*Zaliczenie ćwiczeń*: obowiązek uczestniczenia w zajęciach; dopuszczalne są nieusprawiedliwione nieobecności na 2 godz. ćwiczeń; podstawą zaliczenia jest aktywny udział w zajęciach oraz zaliczenie dwóch sprawdzianów.

*Zaliczenie wykładu*: egzamin.

*Ocena końcowa*: średnia ważona ocen z ćwiczeń i zaliczenia wykładu (wagi odpowiednio 0.55 i 0.45)

*Zakres przedmiotu*

Wykład obejmuje te elementy algebry liniowej, które są wykorzystywane w nauczaniu podstawowych przedmiotów geodezyjnych takich, jak rachunek wyrównawczy, opracowywanie klasycznych sieci geodezyjnych, rozwiązywanie zagadnień geodezyjnych z wykorzystaniem pomiarów GNSS, problemy nawigacyjne z wykorzystaniem filtru Kalmana.

*Efekty kształcenia – umiejętności i kompetencje*

Efektem kształcenia powinno być biegłe posługiwanie się rachunkiem wektorowo – macierzowym w rozwiązywaniu zagadnień geodezyjnych; umiejętność interpretacji rozwiązań problemów geodezyjnych – aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów, zagadnienia sieciowe – z zastosowaniem pojęć algebry liniowej. Szczególny nacisk położono na zastosowanie rozkładów z wykorzystaniem macierzy trójkątnych ($A=LU$, $A=LDU'$, $PA=LU$, $A=P_1L_1U_1$), rozkładów diagonalizujących ($A=S\Lambda S^{-1}$, $A=Q\Lambda Q^T$) oraz związanych z procesem ortogonalizacji ($A=QR$).

*Wykaz zagadnień*

1. Przestrzenie i podprzestrzenie wektorowe (liniowe), omówienie podstawowych pojęć: przestrzeń liniowa nad ciałem skalarów, aksjomaty przestrzeni, własności przestrzeni wektorowej i przykłady, podprzestrzeń wektorowa, podprzestrzeń afiniczna, powłoka liniowa i przestrzeń liniowa rozpięta na zbiorze wektorów, liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni wektorowej, przestrzenie nieskończenie wymiarowe.

2. Arytmetyka liczb zespolonych: pojęcie jednostki urojonej, moduł i argument liczby zespolonej, argument główny, część rzeczywista i urojona, liczby zespolone jako wektory na płaszczyźnie, równość liczb zespolonych, trzy postacie liczb zespolonych - algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza, operacje na liczbach zespolonych - sprzężenie, dodawanie i odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie i pierwiastkowanie, wzory de Moivre'a, podstawowe twierdzenie algebry z wykorzystaniem liczb zespolonych.

2. Wektory w $R^n$ i macierze: operacje na wektorach, iloczyn skalarny i długość wektora, kąt między wektorami, nierówność Schwarza, równanie płaszczyzny i hiperpłaszczyzny w $R^n$, odległość punktu od płaszczyzny/hiperpłaszczyzny, układy równań liniowych i ich zapis macierzowy, rozwiązania układów równań liniowych, istnienie rozwiązań i interpretacja geometryczna.

3. Rozwiązywanie układu równań linowych: metoda eliminacji Gaussa i podstawienia wstecznego, pojęcie elementów głównych układu/macierzy, procedura eliminacji wyrażona przez macierze, pojęcia macierzy rozszerzonej, macierz zamiany wierszy; reguły operacji macierzowych, podział macierzy na bloki i mnożenie blokowe, wyznaczanie iloczynu macierzy metodą „kolumny razy wiersze”, iloczyn diadyczny wektorów; macierze odwrotne, wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą eliminacji Gaussa-Jordana; eliminacja Gaussa jako

rozkład macierzy na czynniki trójkątne $A=LU$ oraz $A=LDU'$, zamiana układu $n$ równań liniowych z $n$ niewiadomymi na dwa układy trójkątne; transpozycje i permutacje, macierze symetryczne, iloczyny symetryczne $R^TR$, $RR^T$ i $LDL^T$, uogólnienie rozkładu $A=LU$ na przypadek procedury eliminacji Gaussa z zamianą wierszy - rozkłady $PA=LU$ i $A= P_1L_1U_1$.

4. Wyznaczniki: wzór na wyznacznik 2×2, własności wyznaczników, wartość wyznacznika a odwracalność macierzy, rozwiązanie układu równań liniowych z wykorzystaniem wzorów Cramera, rozwinięcie Laplace'a, odwrotność macierzy wyrażona przez dopełnienia algebraiczne.

5. Wartości własne i wektory własne macierzy: wprowadzenie do zagadnienia własnego, wielomian charakterystyczny i poszukiwanie jego pierwiastków, suma i iloczyn wartości własnych jako ślad i wyznacznik macierzy, przypadek pierwiastków zespolonych, wyznaczanie wektorów własnych i problem ich istnienia, wykorzystanie wartości i wektorów własnych do diagonalizacji macierzy - rozkład $A=S\Lambda S^{-1}$, zastosowanie rozkładu $A=S\Lambda S^{-1}$ do liczenia funkcji macierzy $A$ takich, jak $A^n$, $A^{-n}$, $\sqrt{A}$, itp., macierze rzeczywiste symetryczne i rozkład $A=Q\Lambda Q^T$ ($Q$ - macierz ortogonalna), pojęcie formy kwadratowej i dodatnia określoność macierzy.

6. Ortogonalność: układy ortogonalne i ortonormalne wektorów w $R^n$, macierze ortogonalne, procedura ortogonalizacji Grama-Schmidta, zastosowanie procedury ortogonalizacji G-S do znalezienia rozkładu $A=QR$ macierzy $A$ wymiaru $n\times k$ ($n>=k$), zastosowanie rozkładu $A=QR$ do obliczenia rozwiązania układu nadokreślonego $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ metodą najmniejszych kwadratów $\boldsymbol{x}=(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$.

*Legenda:*

$L, L^1$ - macierze trójkątne dolne z jedynkami na głównej przekątnej;

$U, U^1$ - macierze trójkątne górne;

$U'$ - macierz trójkątna górna z jedynkami na głównej przekątnej;

$D, \Lambda$ - macierze diagonalne;

$P, P^1$ - macierze kwadratowe otrzymane w wyniku permutacji wierszy macierzy jednostkowej $I$ ;

$Q$ - macierz półortogonalna wymiaru $n\times k$ ($n>=k$), tzn. macierz, której kolumny tworzą układ ortonormalny ($Q^TQ=I$); w przypadku równej ilości kolumn i wierszy $n=k$ jest to macierz ortogonalna;

$R$ - macierz trójkątna górna $k\times k$ z dodatnimi elementami na głównej przekątnej.

*Literatura*:

Strang G., and Borre K., 1997, *Linear algebra, geodesy, and GPS*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA 02181 USA.

Bronsztejn I. N., K. A, Siemiendiajew, G. Musiol and H. Mühlig (2009). *Nowoczesne kompendium matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.