Wydział Geodezji i Kartografii PW, studia stacjonarne I stopnia – inżynierskie
Wykaz zagadnień realizowanych w ramach przedmiotu "Algebra liniowa w geodezji"
prowadzący przedmiot: prof. dr hab. Aleksander Brzeziński
a.brzezinski@gik.pw.edu.pl

- Przestrzenie i podprzestrzenie wektorowe (liniowe), omówienie podstawowych pojęć: przestrzeń liniowa nad ciałem skalarów, aksjomaty przestrzeni, własności przestrzeni wektorowej i przykłady, podprzestrzeń wektorowa, podprzestrzeń afiniczna, powłoka liniowa i przestrzeń liniowa rozpięta na zbiorze wektorów, liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni wektorowej, przestrzenie nieskończenie wymiarowe.

- Arytmetyka liczb zespolonych: pojęcie jednostki urojonej, moduł i argument liczby zespolonej, argument główny, część rzeczywista i urojona, liczby zespolone jako wektory na płaszczyźnie, równość liczb zespolonych, trzy postacie liczb zespolonych - algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza, operacje na liczbach zespolonych - sprzężenie, dodawanie i odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie i pierwiastkowanie, wzory de Moivre'a, podstawowe twierdzenie algebry z wykorzystaniem liczb zespolonych.

- Wektory w R^n i macierze: operacje na wektorach, iloczyn skalarny i długość wektora, kąt między wektorami, nierówność Schwarza, równanie płaszczyzny i hiperpłaszczyzny w R^n, odległość punktu od płaszczyzny/hiperpłaszczyzny, układy równań liniowych i ich zapis macierzowy, rozwiązania układów równań liniowych, istnienie rozwiązań i interpretacja geometryczna.

- Rozwiązywanie układu równań linowych: metoda eliminacji Gaussa i podstawienia wstecznego, pojęcie elementów głównych układu/macierzy, procedura eliminacji wyrażona przez macierze, pojęcia macierzy rozszerzonej, macierz zamiany wierszy; reguły operacji macierzowych, podział macierzy na bloki i mnożenie blokowe, wyznaczanie iloczynu macierzy metodą "kolumny razy wiersze", iloczyn diadyczny wektorów; macierze odwrotne, wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą eliminacji Gaussa-Jordana; eliminacja Gaussa jako rozkład macierzy na czynniki trójkątne $A = LU$ oraz $A = LDU'$, zamiana układu n równań liniowych z n niewiadomymi na dwa układy trójkątne; transpozycje i permutacje, macierze symetryczne, iloczyny symetryczne $R^T R$, RR^T i LDL^T, uogólnienie rozkładu $A = LU$ na przypadek procedury eliminacji Gaussa z zamianą wierszy - rozkłady $PA = LU$ i $A = L_1 P_1 U_1$.

- Wyznaczniki: wzór na wyznacznik 2×2, własności wyznaczników, wartość wyznacznika a odwracalność macierzy, rozwiązanie układu równań liniowych z wykorzystaniem wzorów Cramera, rozwinięcie Laplace'a, odwrotność macierzy wyrażona przez dopełnienia algebraiczne.

- Wartości własne i wektory własne macierzy: wprowadzenie do zagadnienia własnego, wielomian charakterystyczny i poszukiwanie jego pierwiastków, suma i iloczyn wartości własnych jako ślad i wyznacznik macierzy, przypadek pierwiastków zespolonych, wyznaczanie wektorów własnych i problem ich istnienia, wykorzystanie wartości i wektorów własnych do diagonalizacji macierzy – rozkład $A = S\Lambda S^{-1}$, zastosowanie rozkładu $A = S\Lambda S^{-1}$ do liczenia funkcji macierzy A takich, jak A^n, A^{-n}, $\sqrt{A}$, itp., macierze rzeczywiste symetryczne i rozkład $A = Q\Lambda Q^T$ (Q – macierz ortogonalna), pojęcie formy kwadratowej i dodatnia określoność macierzy.

- Ortogonalność: układy ortogonalne i ortonormalne wektorów w R^n, macierze ortogonalne, procedura ortogonalizacji Grama-Schmidta, zastosowanie procedury ortogonalizacji G-S do znalezienia rozkładu $A = QR$ macierzy A wymiaru $n \times k$ ($n \geqslant k$), zastosowanie rozkładu $A = QR$ do obliczenia rozwiązania układu nadokreślonego $A\vec{x} = \vec{b}$ metodą najmniejszych kwadratów $\hat{\vec{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$.

Legenda:

L, L_1 – macierze trójkątne dolne z jedynkami na głównej przekątnej;

U, U_1 – macierze trójkątne górne;

U' – macierz trójkątna górna z jedynkami na głównej przekątnej;

D, Λ – macierze diagonalne;

P, P_1 – macierze kwadratowe otrzymane w wyniku permutacji wierszy macierzy jednostkowej I;

Q – macierz półortogonalna wymiaru $n \times k$ ($n \geqslant k$), tzn. macierz, której kolumny tworzą układ ortonormalny ($Q^T Q = I$); w przypadku równej ilości kolumn i wierszy $n = k$ jest to macierz ortogonalna;

R – macierz trójkątna górna $k \times k$ z dodatnimi elementami na głównej przekątnej.