

Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

# Fale pływowe

## Ćwiczenie: Analiza pływowa [Geofizyka]

wersja z 31 marca 2014

Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

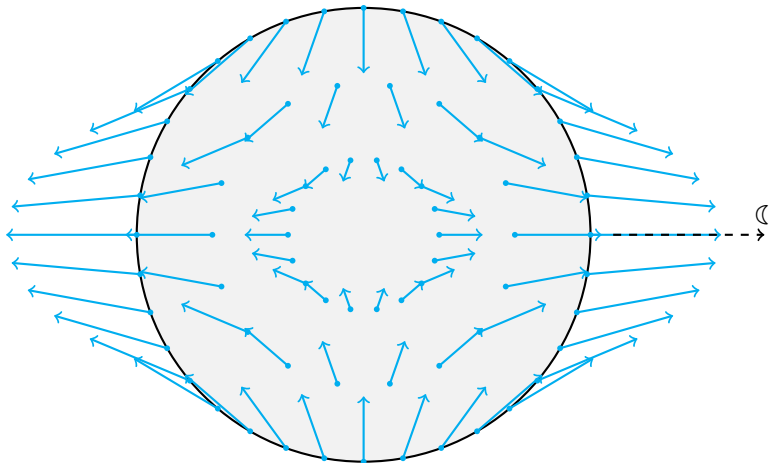
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie



$$V_A = \frac{Gm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos z)$$

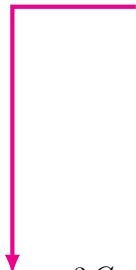
$$V_{A0} = \frac{Gm}{r}$$

$$V_{A1} = \frac{Gm}{r} \frac{R}{r} \cdot \cos z$$

$$V_{A2} = \frac{Gm}{r} \frac{R^2}{r^2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cos^2 z - \frac{1}{2}\right)$$

$$V_{A3} = \frac{Gm}{r} \frac{R^3}{r^3} \cdot \left(\frac{5}{2} \cos^3 z - \frac{3}{2} \cos z\right)$$

$$V_{pA} = \frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos z)$$


$$\begin{cases} V_2 = \frac{GmR^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 z - \frac{1}{2} \right) \\ \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(t) \end{cases}$$

$$V_2 = \frac{3 GmR^2}{4 r^3} \cdot \begin{cases} 3(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3})(\sin^2 \delta - \frac{1}{3}) & \text{wyraz strefowy} \\ & \text{pływy długookresowe} \\ + \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos t & \text{wyraz tesseralny} \\ & \text{pływy dobowe} \\ + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2t & \text{wyraz sektorowy} \\ & \text{pływy pół-dobowe} \end{cases}$$

Stacyczna teoria  
plywów

Typy plywów wg  
Laplace'a

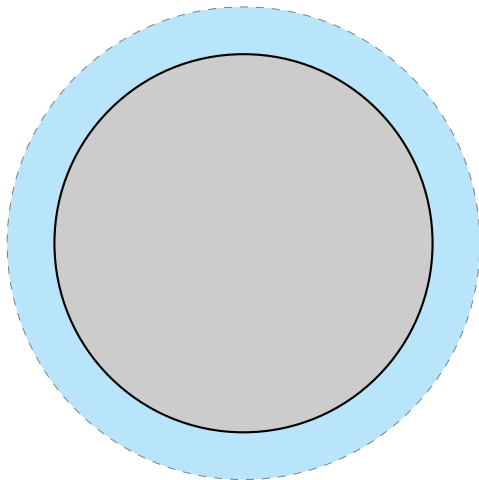
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
plywowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
plywów

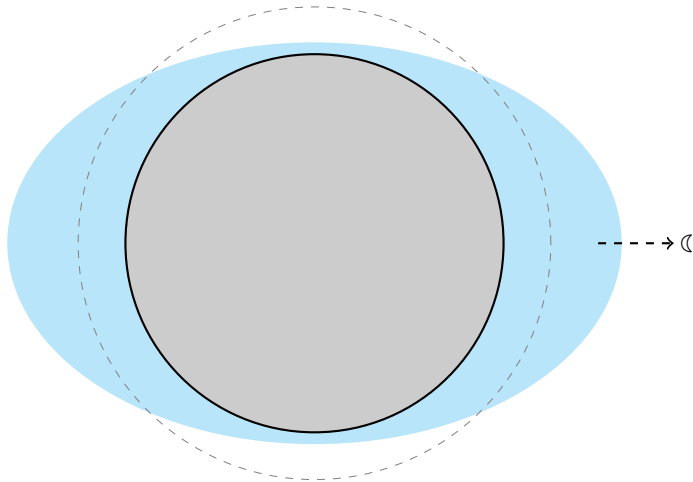
Typy plywów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
plywowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie  
Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
plywów

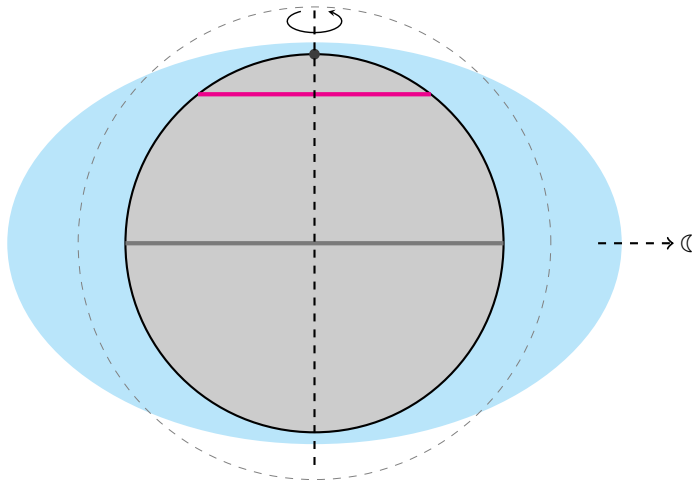
Typy plywów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
plywowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie  
Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
plywów

Typy plywów wg  
Laplace'a

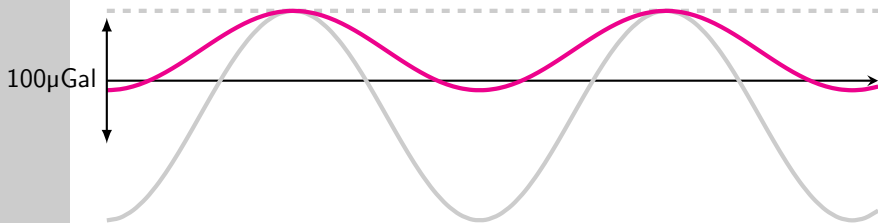
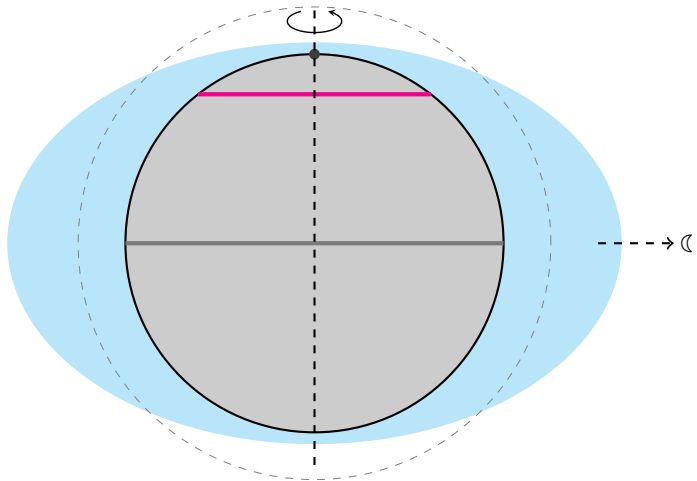
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
plywowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie





Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

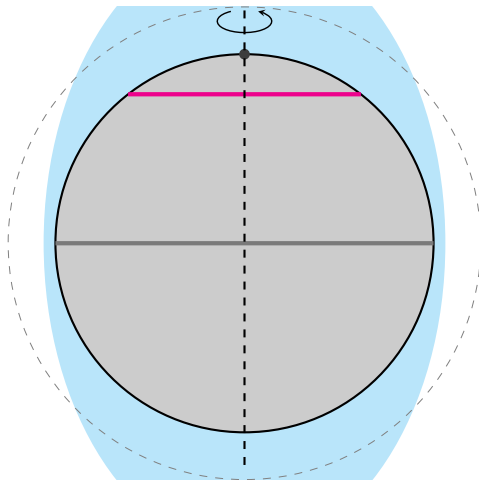
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie



100 $\mu$ Gal



Stacyczna teoria  
plywów

Typy plywów wg  
Laplace'a

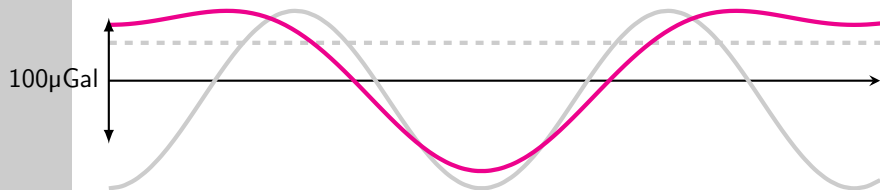
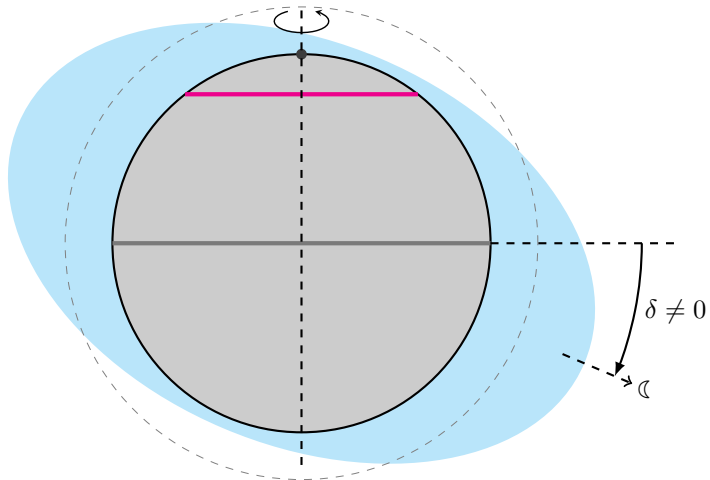
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
plywowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

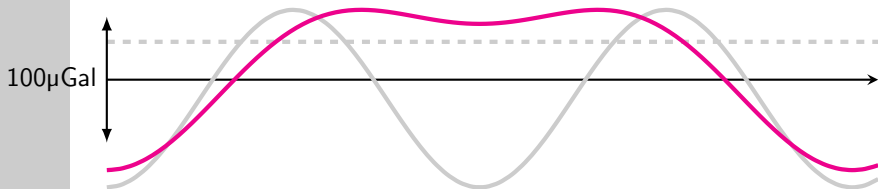
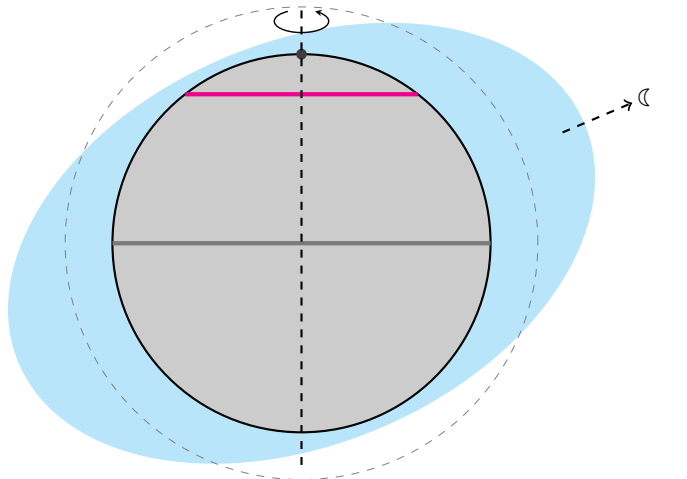
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

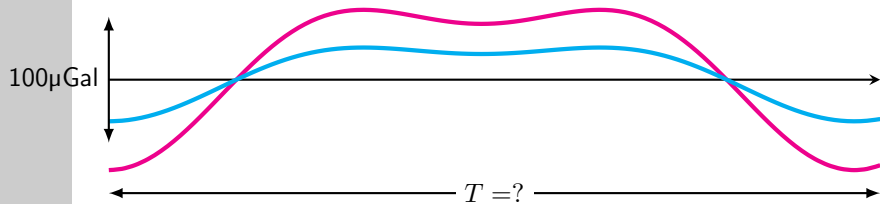
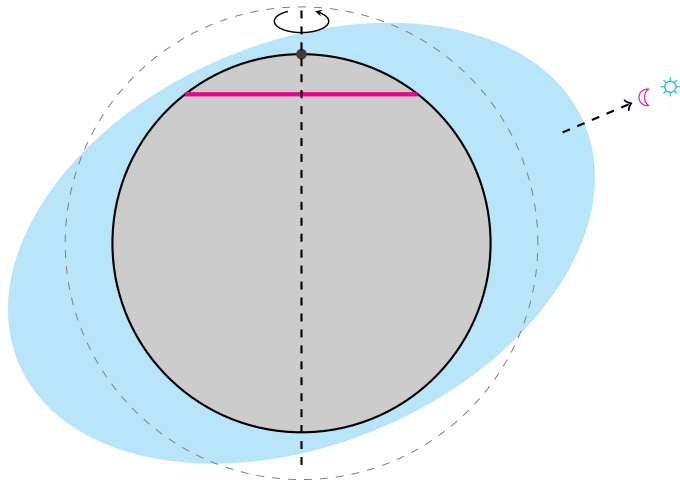
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

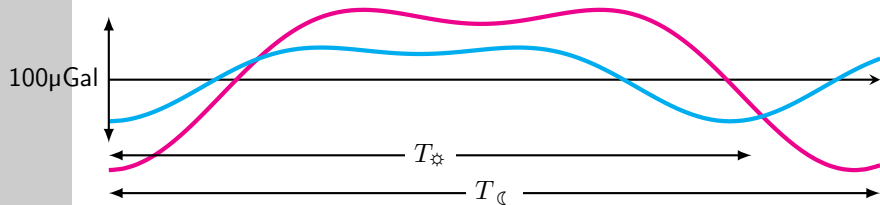
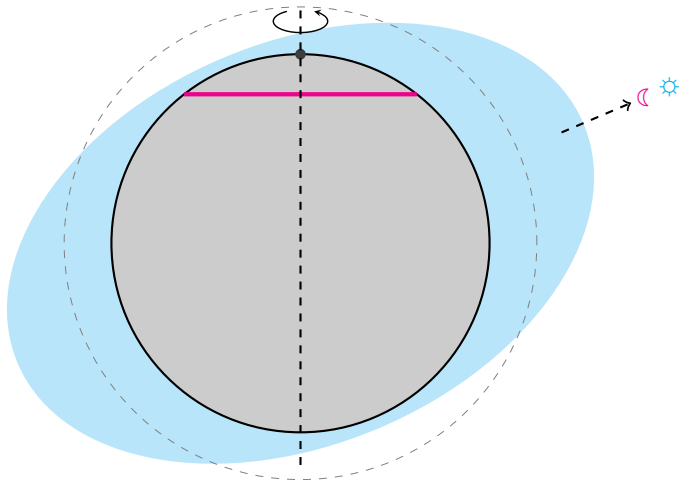
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

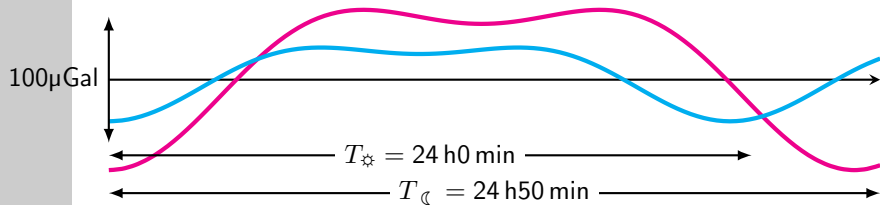
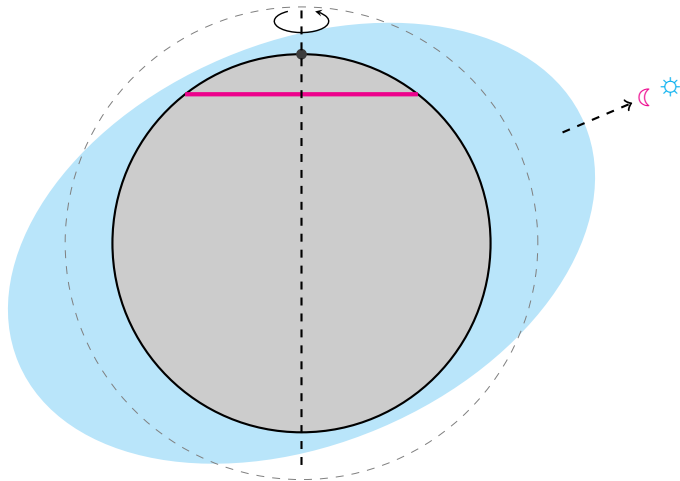
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie



Statyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

$$V = \frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n f(\varphi, \delta, t)$$

$$= \sum A(K_{1-6}, R, \varphi) \sin \left\{ (a_1 \dot{\tau} + a_2 \dot{s} + a_3 \dot{h} + a_4 \dot{p} + a_5 \dot{N}' + a_6 \dot{p}_s) t \right\}$$

## Laplace

$$V = \frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n f(\varphi, \delta, t)$$

## Doodson

$$= \sum A(K_{1-6}, R, \varphi) \sin \left\{ (a_1 \dot{\tau} + a_2 \dot{s} + a_3 \dot{h} + a_4 \dot{p} + a_5 \dot{N}' + a_6 \dot{p}_s) t \right\}$$

$\dot{\tau}$	24,833	h	średni czas księżycowy
$\dot{s}$	27,3	d	średnia długość Księżyca
$\dot{h}$	365,25	d	średnia długość Słońca
$\dot{p}$	8,8	lat	średnia długość perigeum orbity Księżyca
$-\dot{N}'$	18,6	lat	średnia długość węzła wstępującego orbity Księżyca
$\dot{p}_s$	20 942	lat	średnia długość perigeum orbity Słońca



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

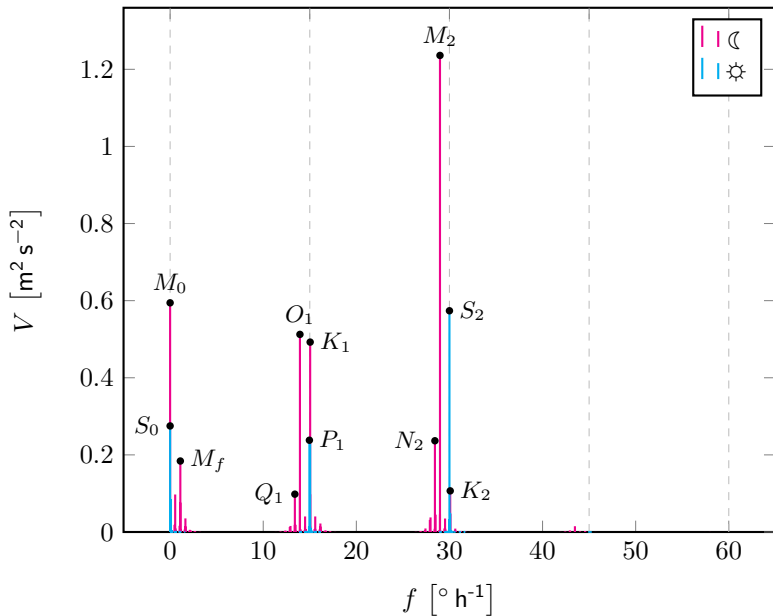
Ćwiczenie  
Rozwiązanie

Symbol	Okres	Pochodzenie
Pływy długookresowe		
$M_0$		Stały pływ księżycowy
$S_0$		Stały pływ słoneczny
$S_a$	$365.25^d$	Pływ eliptyczny $S_0$
$S_{sa}$	$182.62^d$	Pływ deklinacyjny $S_0$
$M_m$	$27.55^d$	Pływ eliptyczny $M_0$
$M_f$	$13.66^d$	Pływ deklinacyjny $M_0$
Pływy dobowe		
$O_1$	$25^h 49^m$	Główna fala księżycowa
$P_1$	$24^h 04^m$	Główna fala słoneczna
$K_1$	$23^h 56^m$	Fala deklinacyjna k-s
Pływy pół-dobowe		
$N_2$	$12^h 39^m$	Pływ eliptyczny $M_2$
$M_2$	$12^h 25^m$	Główna fala księżycowa
$S_2$	$12^h 00^m$	Główna fala słoneczna
Pływy ter-dobowe		
$M_3$	$8^h 17^m$	Główna fala księżycowa

... i wiele, wiele innych...

# Fale pływowe

0 cpd      1 cpd      2 cpd      3 cpd      4 cpd



Statyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

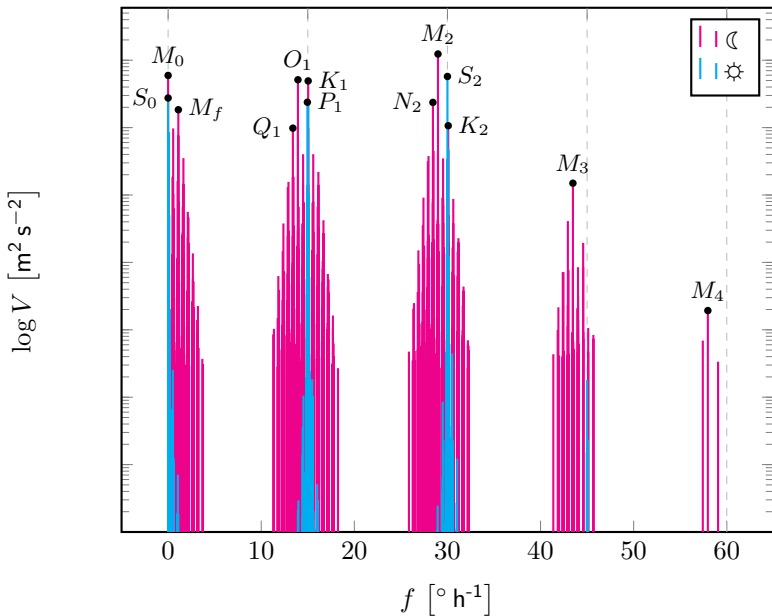
Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie  
Rozwiązanie

# Fale pływowe

0 cpd      1 cpd      2 cpd      3 cpd      4 cpd



Stacyczna teoria pływów

Typy pływów wg Laplace'a

Rozwinięcie Doodsona

Przykłady fal pływowych

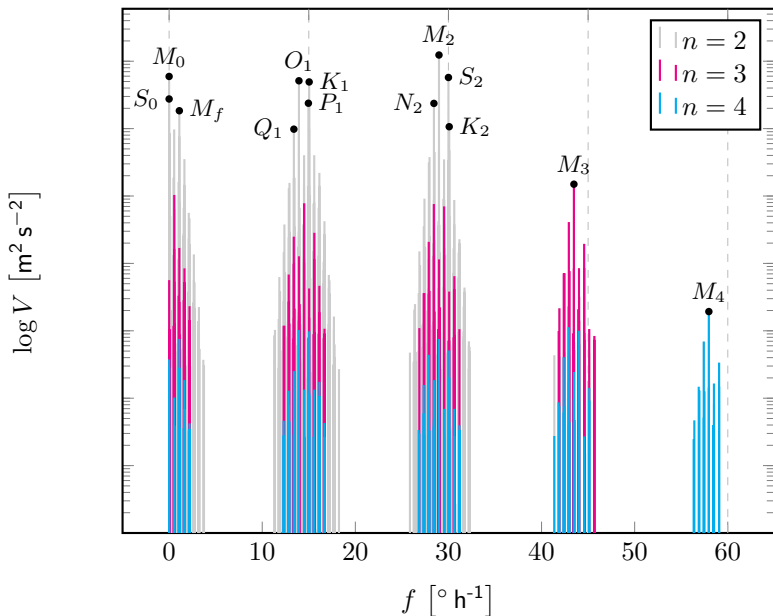
Analiza harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

# Fale pływowe

0 cpd      1 cpd      2 cpd      3 cpd      4 cpd



Statyczna teoria pływów

Typy pływów wg Laplace'a

Rozwinięcie Doodsona

Przykłady fal pływowych

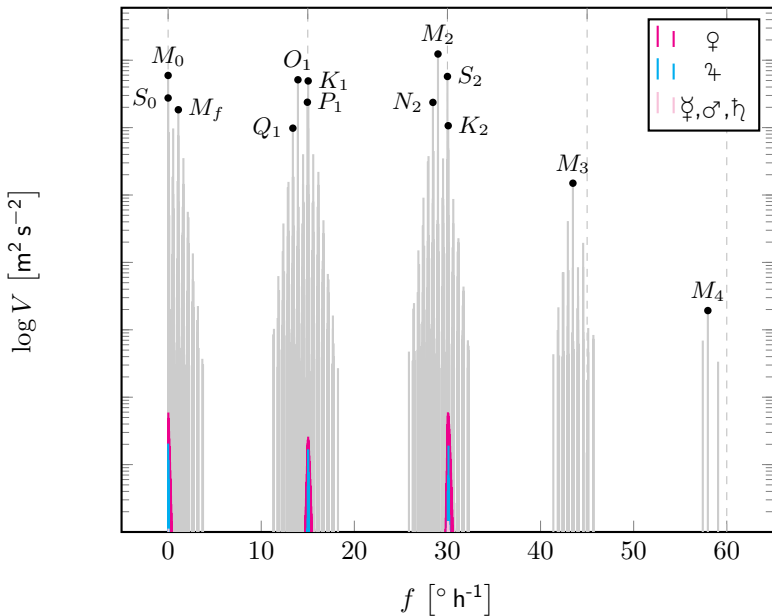
Analiza harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

# Fale pływowe

0 cpd      1 cpd      2 cpd      3 cpd      4 cpd



Statyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

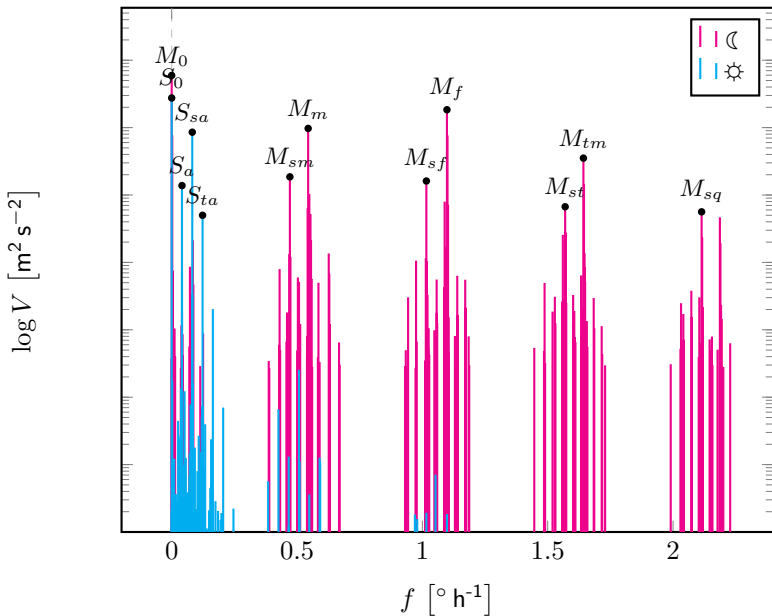
Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

# Fale pływowe

0 cpd



Statyczna teoria pływów

Typy pływów wg Laplace'a

Rozwinięcie Doodsona

Przykłady fal pływowych

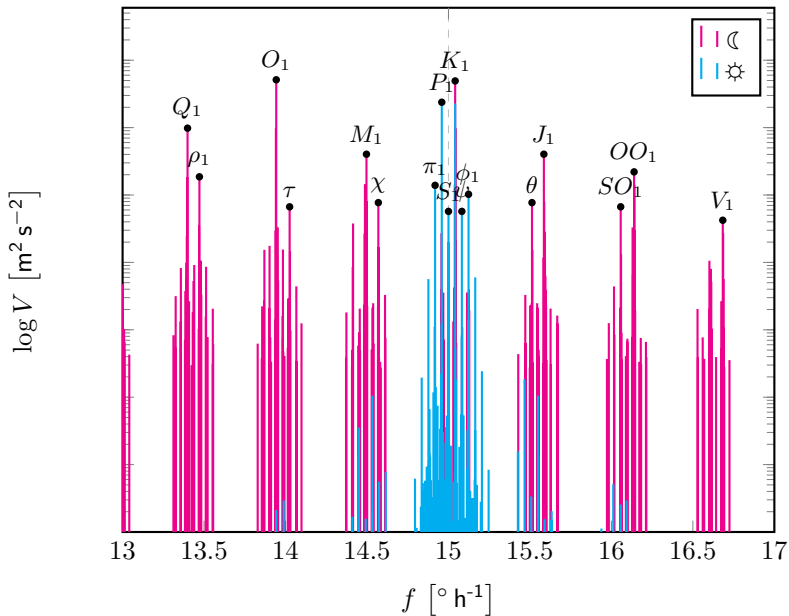
Analiza harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

# Fale pływowe

1 cpd



Statyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

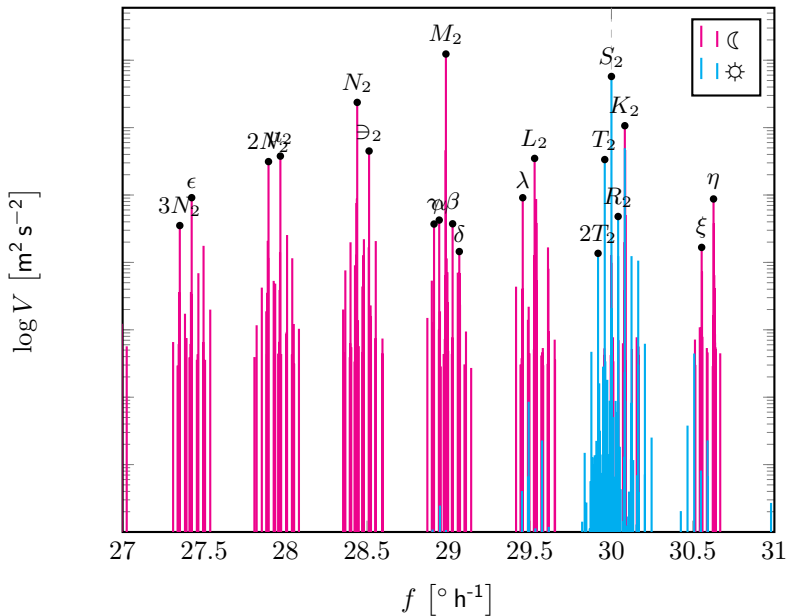
Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

# Fale pływowe

2 cpd



Statyczna teoria pływów

Typy pływów wg Laplace'a

Rozwinięcie Doodsona

Przykłady fal pływowych

Analiza harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

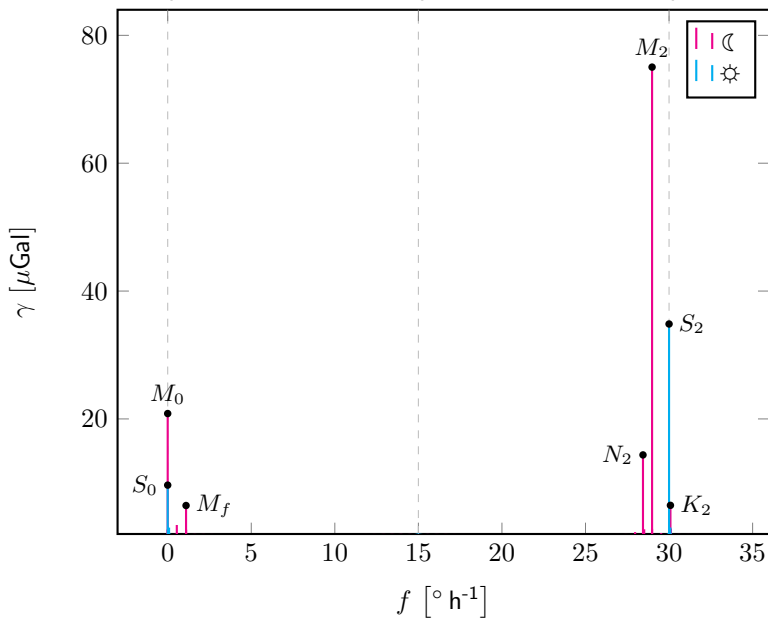


# Fale pływowe – $\varphi = 0^\circ$

0 cpd

1 cpd

2 cpd



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

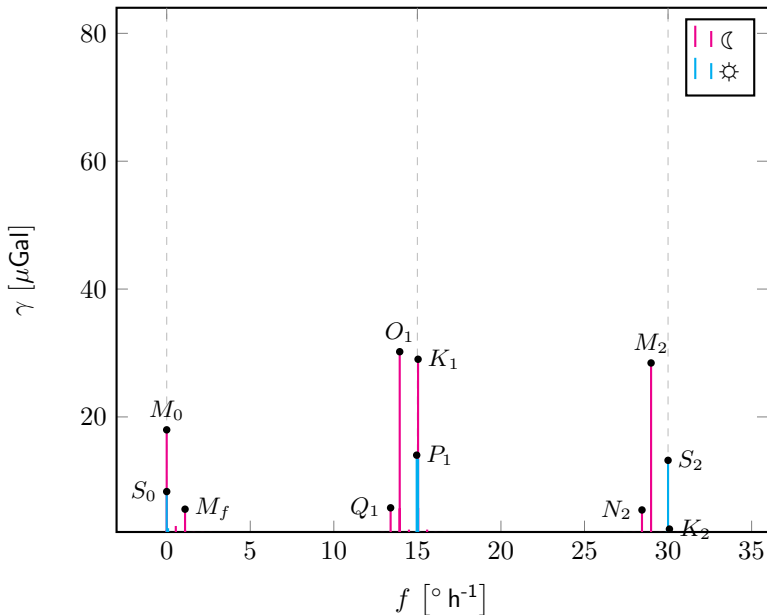
Rozwiązanie

# Fale pływowe – $\varphi = 52^\circ$

0 cpd

1 cpd

2 cpd



Stacyczna teoria pływów

Typy pływów wg Laplace'a

Rozwinięcie Doodsona

Przykłady fal pływowych

Analiza harmoniczna

Ćwiczenie

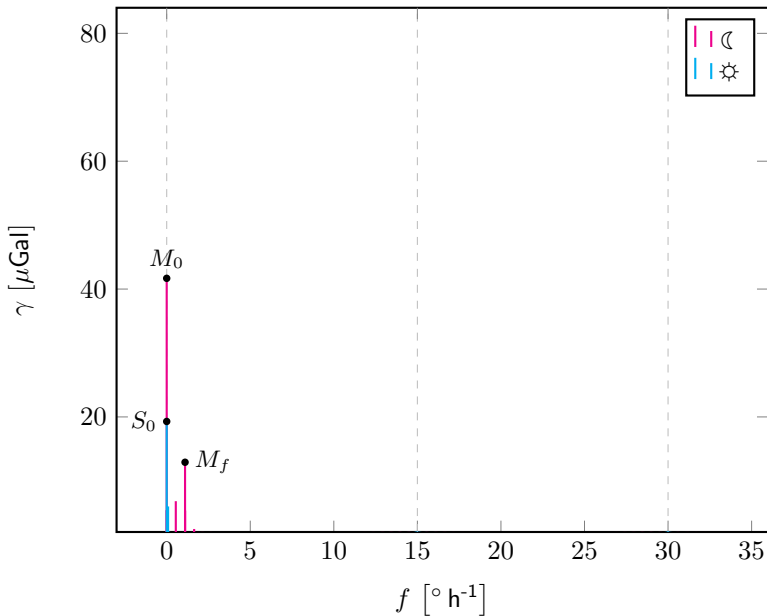
Rozwiązanie

# Fale pływowe – $\varphi = 90^\circ$

0 cpd

1 cpd

2 cpd



Stacyczna teoria pływów

Typy pływów wg Laplace'a

Rozwinięcie Doodsona

Przykłady fal pływowych

Analiza harmoniczna

Ćwiczenie  
Rozwiązanie

Statyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

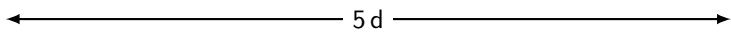
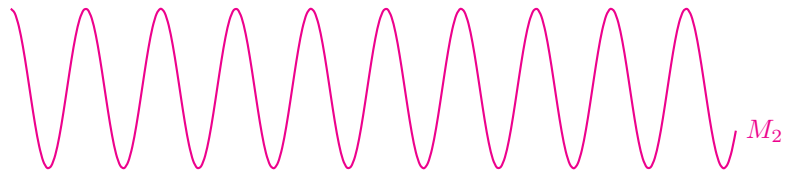
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

**Analiza  
harmoniczna**

Ćwiczenie **100 $\mu$ Gal**

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

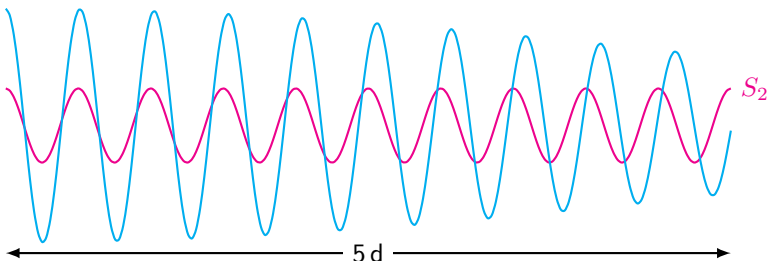
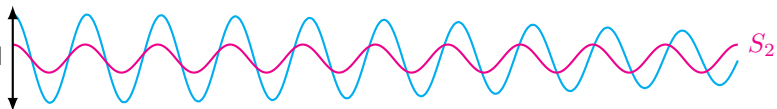
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie  $100\mu\text{Gal}$

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

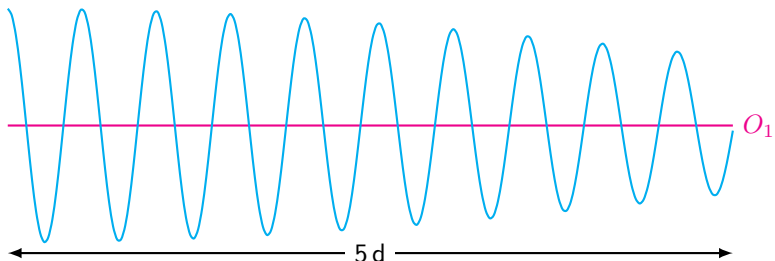
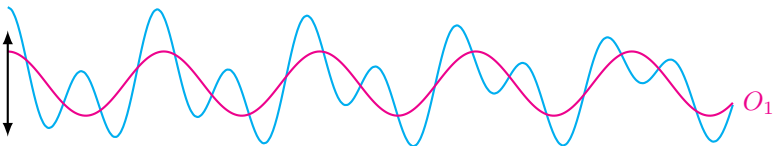
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie  $100\mu\text{Gal}$

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

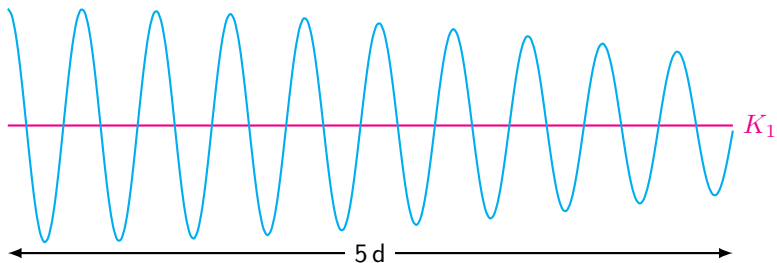
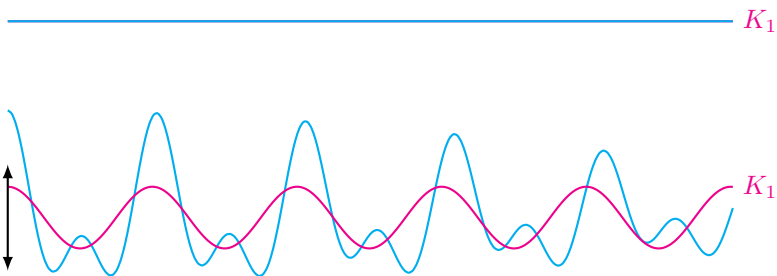
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie  $100\mu\text{Gal}$

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

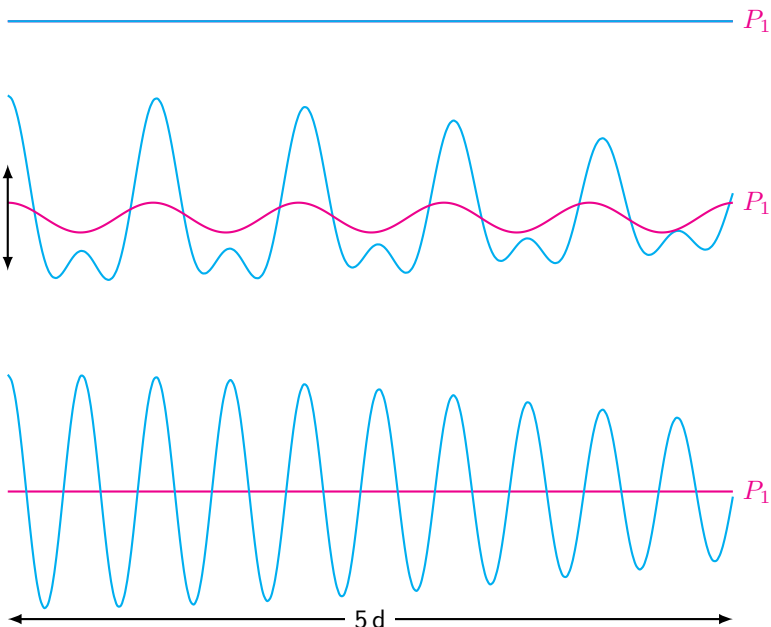
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie  $100\mu\text{Gal}$

Rozwiązanie





Statyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

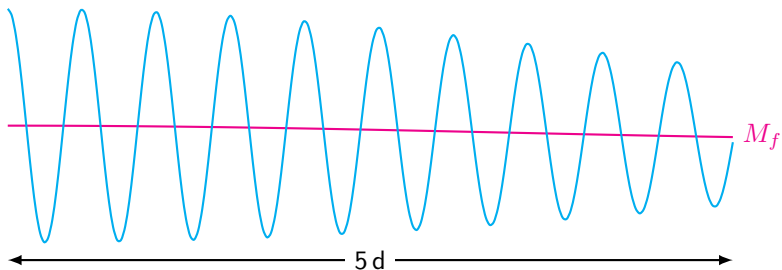
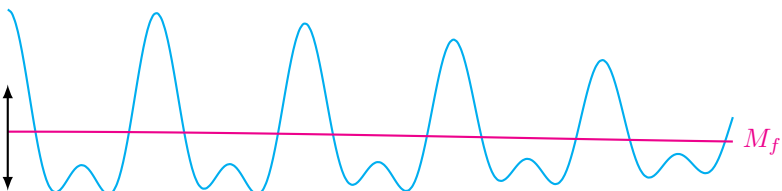
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie  $100\mu\text{Gal}$

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

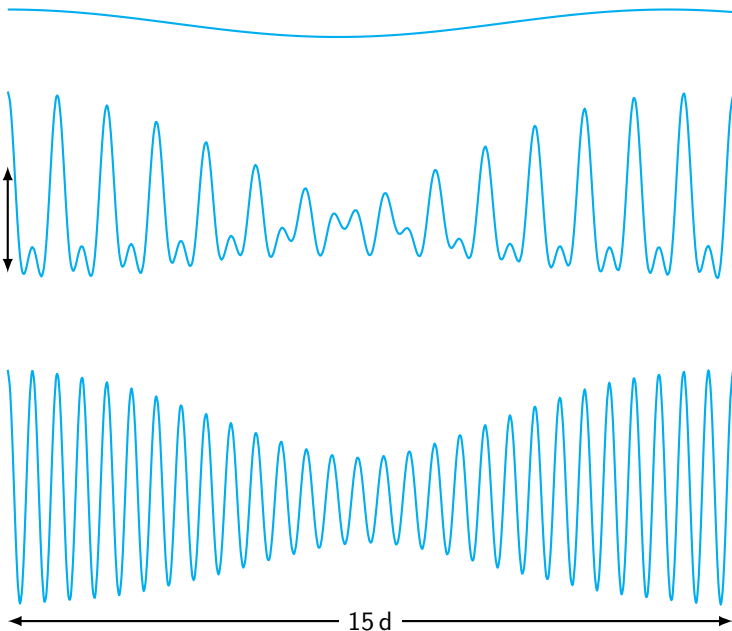
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie  $100\mu\text{Gal}$

Rozwiązanie



Statyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

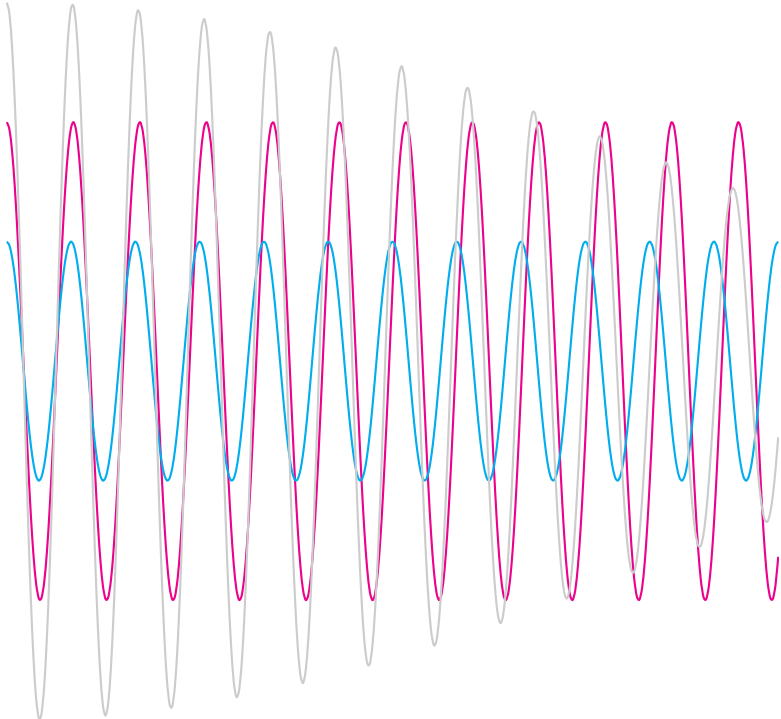
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

**Analiza  
harmoniczna**

Ćwiczenie

Rozwiązanie



Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

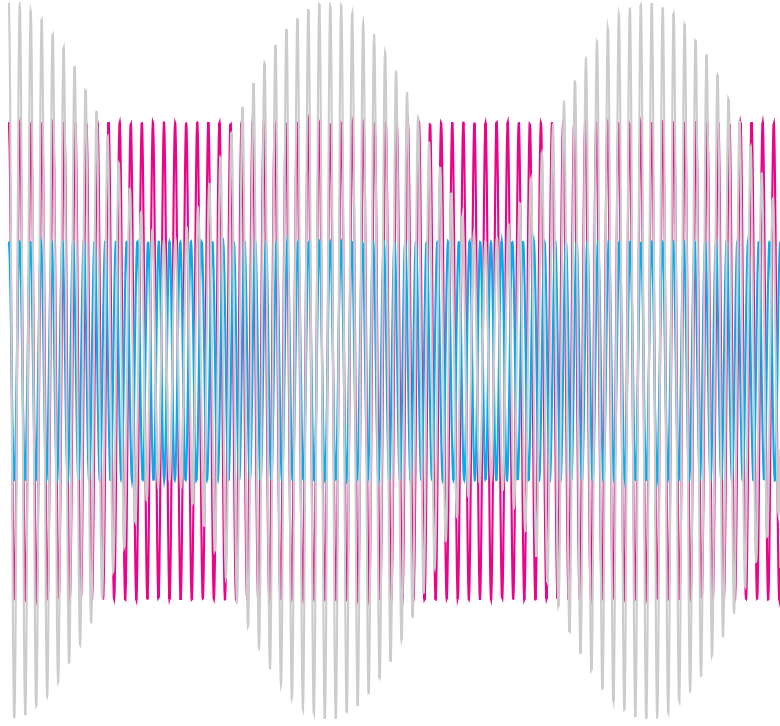
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

**Analiza  
harmoniczna**

Ćwiczenie

Rozwiązanie



## Zadanie domowe

Ostatnia aktualizacja 31 marca 2014

Należy przeprowadzić *analizę widmową* (zwaną też *analizą harmoniczną*, *analizą Fouriera*) dla danych grawimetrycznych z Józefosławia – grawimetr sprężynowy *LC&R ET26*. Proszę podać częstotliwości wyróżnionych fal i ich amplitudy. Proszę również zamieścić wykres z odpowiednio opisanymi osiami i wartościami.

*Analiza widmowa* pozwala znaleźć składowe harmoniczne (szereg sinusoid, ich *amplitudy* i *częstotliwości*) w analizowanym sygnale. Jest to nadzwyczaj użyteczna technika, nie tylko w pływach lecz w całej geodezji jak i w innych dziedzinach nauki i życia. Po szczegóły odsyłam do literatury i internetu. Krótko mówiąc transformacja i odwrotna transformacja Fouriera pozwalają na zmianę sygnału z dziedziny czasu na dziedzinę częstotliwości i odwrotnie.

Fragment danych przedstawiony jest poniżej – dane są podane w formacie yyyy mm dd hh mm ss g, co oznacza odpowiednio rok, miesiąc, dzień, godzinę, minutę i sekundę oraz wartość przyspieszenia siły ciężkości w  $\text{nm s}^{-2}$ .

Wykaz 1: Dane do zadania (przykładowy fragment)

2007	1	2	16	0	0	-1059.343
2007	1	2	17	0	0	-1374.666
2007	1	2	18	0	0	-1783.991
2007	1	2	19	0	0	-2227.802

📎 (wszystkie dane, dane.tar.bz2)

Załączone dane są wolne od „dziur”. W przypadku szybkiej transformacji Fouriera nierównomierność próbkowania sygnału jest dużym problemem. Są sposoby, żeby z tym sobie radzić ale to jest poza tematem tego ćwiczenia. W każdym razie nie można stosować tych algorytmów dla nierównomiernie rozłożonych danych w dziedzinie częstotliwości.

Stacyczna teoria  
plywów

Typy plywów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
plywowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

Z danych należy wybrać swój podzbiór określony datami (poniżej) w zależności od numeru na liście (numery podane są na stronie internetowej [WWW](#)).

### Wykaz 2: Zestawy

Numer	0:	od	2007	1	2	16	0	do	2007	3	6	3	0
Numer	1:	od	2007	1	12	22	0	do	2007	3	16	9	0
Numer	2:	od	2007	1	23	4	0	do	2007	3	26	15	0
Numer	3:	od	2007	2	2	10	0	do	2007	4	5	21	0

📌 (wszystkie dane, zestawy.dat)

# Zadanie

Do obliczeń można wykorzystać istniejące oprogramowanie. Spośród wielu (bardzo wielu) możliwości można,

- wykorzystać Matlaba lub jego darmowy (!) odpowiednik (prawie odpowiednik) Octave'a

Na zachętę poniżej podaje przykładowy skrypt rozwiązujący zadanie w Octave'ie (linie komentarza zaczynają się od znaku %).

```
% Wczytanie danych z pliku do macierzy A
A = load ( "./zestawy/dane0.dat" );

% Ile pozycji jest w danych
L=length(A);

% Wykorzystanie wbudowanej funkcji fft.
% Szybka transformata fouriera wymaga,
% zeby liczba danych byla potega dwójki
% dlatego wykorzystujemy funkcje
% 'nextpow2' (patrz wyjasnienia w instrukcji Octave'a).
FFT=fft ( A(:,7) , 2^nextpow2(L) ) / L ;

% Czestotliwosc i amplituda
freq = 1/2 * linspace(0,1,2^nextpow2(L) / 2+1)';
ampl = 2 * abs( FFT( 1:2^nextpow2(L) / 2+1 ) );

% Mielismy dane godzinne a wyniki chcemy w cpd
freq = freq * 24;

% I zapis pliku wynikowego
PLIK=fopen ( 'wyniki.dat', 'w' );
for i=1:length(freq)
    fprintf ( PLIK, "%10.3f %10.3f\n", freq(i), ampl(i) )
end
```

Statyczna teoria  
plywów

Typy plywów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
plywowych

Analiza  
harmoniczna

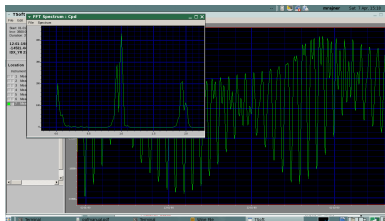
Ćwiczenie

Rozwiązanie

# Zadanie



- wykorzystać Excela – jest możliwość przeprowadzenia analizy Fouriera w tym pakiecie – ale tutaj nic nie podpowiem gdyż sam tego nie robiłem. Z tego co wiem open office nie oferuje jeszcze takich obliczeń.
- wykorzystać program Tsoft  
<http://seismologie.oma.be/TSOFT/tsoft.html>  
Łatwe w użyciu oprogramowanie do analizy szeregów czasowych. Ma też moduł do obliczeń teoretycznych pływów ziemskich. Obszerna dokumentacja i pliki pomocy pozwolą Państwu na stosunkowo łatwe rozwiązanie problemu. Poniżej pokazany jest „zrzut ekranu” z programu Tsoft z rozwiązaniem dla zestawu nr 0.



- znaleźć sobie coś „pod siebie” – ogromny wybór.

Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

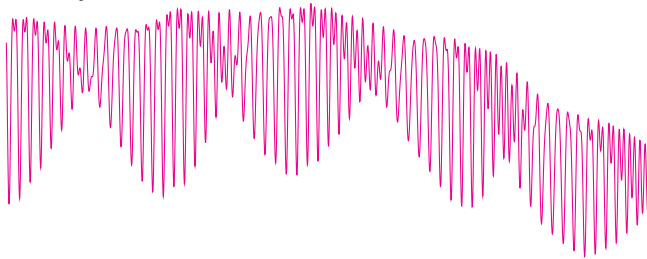
Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

**Rozwiązanie**

## Rozwiązanie dla zestawu nr 0.



Ćwiczenie

Rozwiązanie

Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

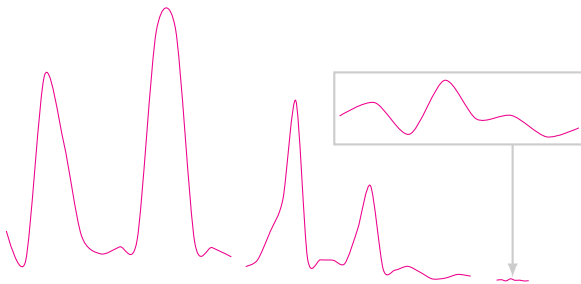
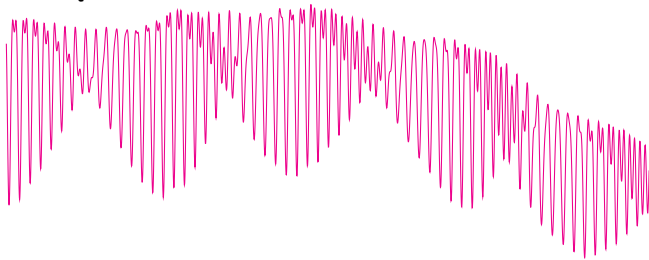
Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

**Rozwiązanie**

## Rozwiązanie dla zestawu nr 0.



Badanie

Interesujące nas przedziały

Statyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

Rozwinięcie  
Doodsona

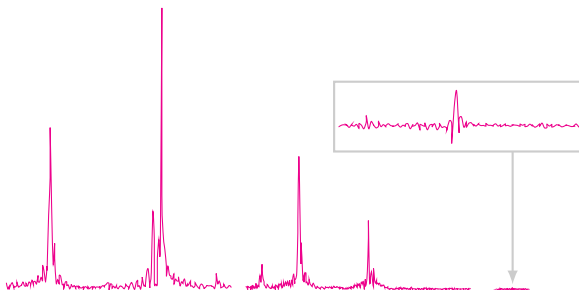
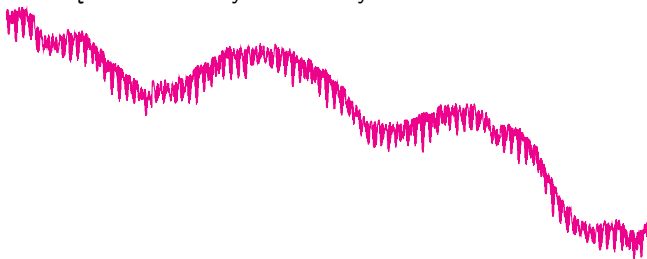
Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie

## Rozwiązanie dla wszystkich danych.



Więcej danych – lepsza rozdzielczość!

Ćwiczenie

I wystarczyłoby teraz z pliku lub wykresu (z małą dokładnością) odczytać częstotliwości i amplitudy głównych pików w widmie (*fal pływowych*). Można się również pokusić o ich nazwanie (katalog potencjału pływowego

<http://www.eas.slu.edu/GGP/ETERNA34/COMMDAT/HW95S.DAT>).

Rozdzielczość widma silnie zależy od liczby danych pomiarowych. Im dłuższy ciąg obserwacyjny, tym więcej szczegółów (tym samym różnych fal) możemy w widmie wyróżnić. Przykład widma z pełnego roku obserwacji znajdują państwo w „podlinkowanej” pracy [\[pdf\]](#).

Na koniec zwracam uwagę, że często przy analizie harmonicznnej wykorzystuje się *moc widmową*. W przypadku naszych danych jednostką mocy widmowej były by  $(\text{nm}/\text{s}^2)^2/\text{Hz}$ . W przypadku *widma amplitudowego* mamy wprost amplitudy fal pływowych –  $\text{nm s}^{-2}$ .

Powodzenia!

Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

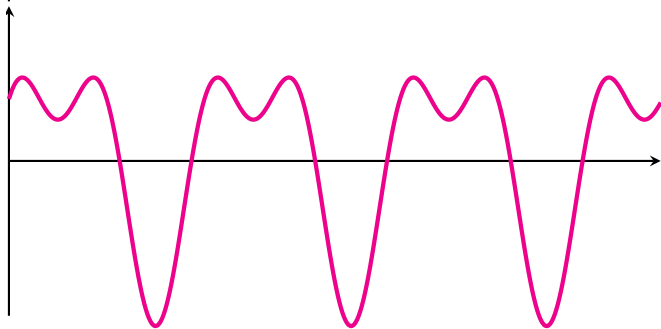
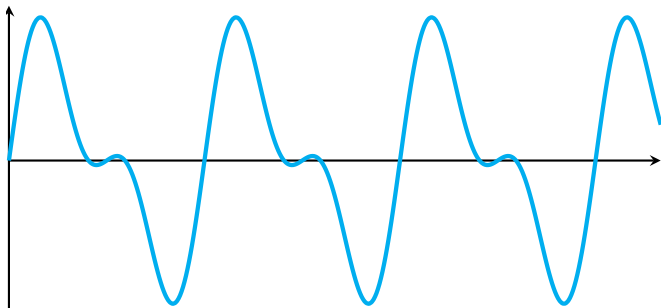
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

Ćwiczenie

Rozwiązanie



Zadanie\*

Stacyczna teoria  
pływów

Typy pływów wg  
Laplace'a

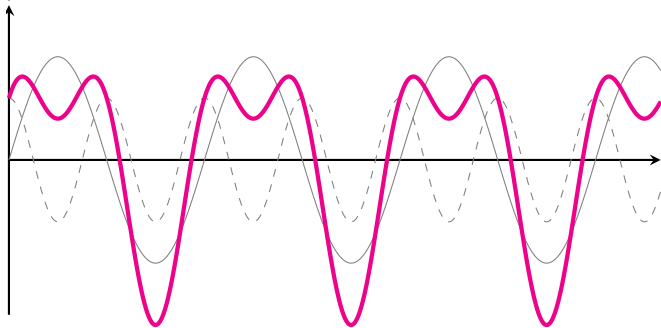
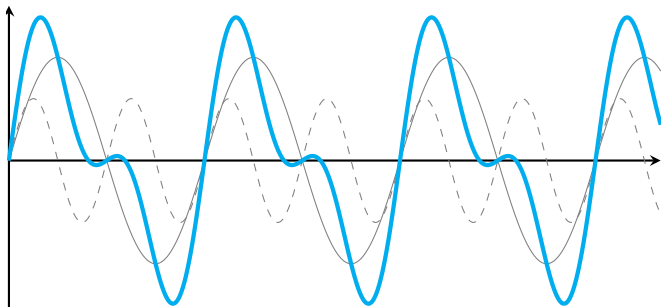
Rozwinięcie  
Doodsona

Przykłady fal  
pływowych

Analiza  
harmoniczna

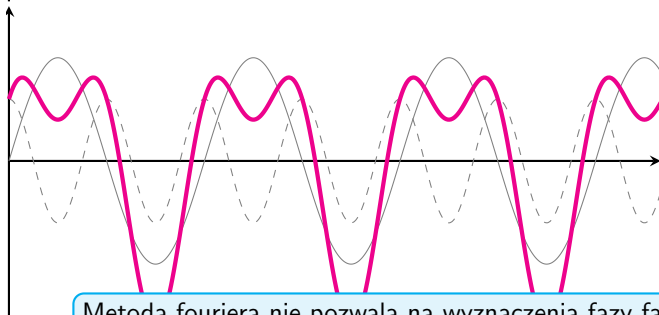
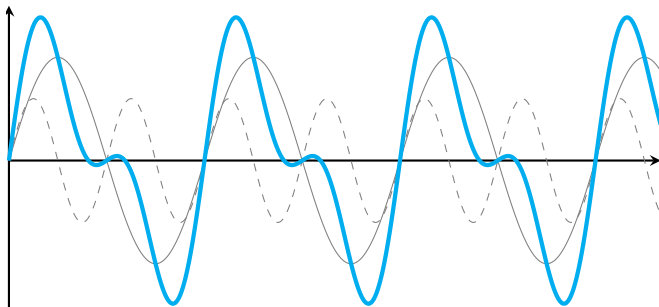
Ćwiczenie

Rozwiązanie



# Zadanie\*

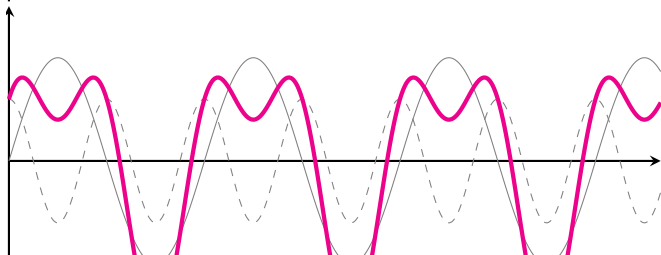
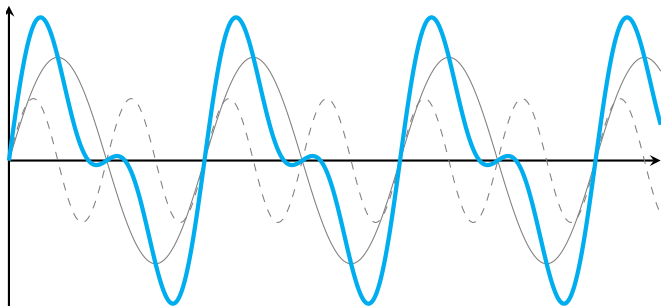
- Stacyczna teoria pływów
- Typy pływów wg Laplace'a
- Rozwinięcie Doodsona
- Przykłady fal pływowych
- Analiza harmoniczna
- Ćwiczenie
- Rozwiązanie



Metoda fouriera nie pozwala na wyznaczenia fazy fali pływowej!  
Rozwiązaniem jest Metoda Najmniejszych Kwadratów

# Zadanie\*





Zadanie dodatkowe - wyznaczyć fazy 3 fal o największej amplitudzie

Podpowiedź - równanie obserwacyjne:  $y(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$